Teo.: M varietà $\overset{\text{(connessa)}}{\text{non}}$ orientabile. $\exists\, \tilde M \xrightarrow{\pi} M$ rivestimento ORIENTANTE (canonico) di grado 2 con $\tilde M$ orientabile.

Dim.: $\tilde M = \{(p, o_p) \mid p \in M,\ o_p \text{ orientazione di } T_pM\}$.

$\pi: \tilde M \xrightarrow{2:1} M$, $(p, o_p) \mapsto p$. Atlante per $\tilde M$: $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde\varphi \mid \varphi \in \mathcal{A}\}$,

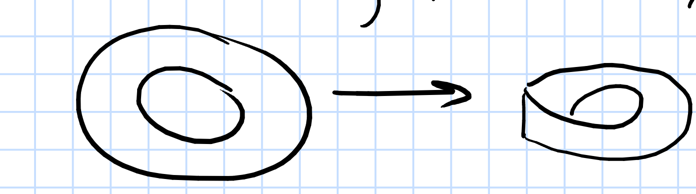
$\tilde\varphi = \varphi \circ \pi$ sull'intorno di $\tilde M$ con l'orientazione indotta da φ.

1) È atlante liscio;

2) è orientato;

3) $\tilde M$ è connesso (serve M non ori.). $\square$

Es.: $S^n \to \mathbb{RP}^n$; $T \to K = \mathbb{R}^2/\Gamma$, $\Gamma = \langle \eta, \gamma \rangle$, $T = \mathbb{R}^2/\Gamma'$, $\Gamma' = \langle \eta^2, \gamma \rangle$;



Cor.: M connessa non ori. $\Rightarrow \exists\, H \triangleleft \pi_1(M)$ di indice 2.

Cor.: M semplicemente connessa $\Rightarrow$ ori..

Cor.: $\mathbb{CP}^n$ è orientabile $\forall n$.

Sottovarietà

Def.: M^m varietà, $0 \le k \le m$. Un sottoinsieme $S \subseteq M$ è una k-SOTTOVARIETÀ se $\forall p \in S\ \exists\, U(p) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^m$ carta t.c. $\varphi(U \cap S) = L \subseteq \mathbb{R}^m$ k-sottospazio affine.

Con un isomorfismo affine $(\mathbb{R}^m, L) \xrightarrow{\psi} (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$.

Una sottovarietà $S \subseteq M$ ha una naturale struttura di k-varietà:

$\mathcal{A}_S = \{\varphi_{|S}$ con φ come sopra$\}$.

$\varphi_{|S}: U \cap S \to \mathbb{R}^k$, le mappe di transizione sono lisce perché restrizioni di mappe lisce.

Ex.: M varietà, $U \subseteq M$ aperto, $\varphi: U \to \overset{\text{aperto}}{V} \subseteq \mathbb{R}^m$ è carta $\Leftrightarrow$ è diffeo..

Es.: grafico di funzione liscia. $f: M \to N$ liscia,

$\mathrm{graf}(f) \subseteq M \times N$, $\mathrm{graf}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$

è una sottovarietà liscia con la stessa dimensione di M.

Localmente posso supporre $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$.

$f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ induce $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $(x, y) \longmapsto (x, y + f(x))$ parametrizzazione.

$F(\mathbb{R}^m \times \{0\}) = \mathrm{graf}(f)$, $F^{-1}(x, y) = (x, y - f(x))$,

$F^{-1}\{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \mathrm{graf}(f)\} = \{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m \times \{0\}\}$ funziona $\forall p \in \mathrm{graf}(f)$.

Cor.: $S \subseteq \mathbb{R}^n$ che è localmente un grafico è sottovarietà.

↳ di $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ con k fissato

Es.: $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è una sottovarietà.

Ex.: $W \subseteq \mathbb{RP}^n$ sottospazio proiettivo di dim. k è sottovarietà diffeomorfa a $\mathbb{RP}^k$.

Immersioni

Def.: $f: M^m \to N^n$ è un'IMMERSIONE in $p \in M$ se $df_p: T_pM \to T_pN$ è iniettivo ($\Rightarrow m \le n$). È una SOMMERSIONE se $df_p: T_pM \to T_pN$ è suriettivo ($\Rightarrow m \ge n$).

Teo. (FORMA NORMALE): $m = n$, se df_p è invertibile $\exists$ carte

$$\begin{tikzcd} U(p) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & W(f(p)) \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "id"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

(inversione locale).

$m \le n$, se df_p è iniettivo $\exists$ carte

$$\begin{tikzcd} U(p) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & W(f(p)) \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

t.c. $F(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$.

$m \ge n$, se df_p è suriettivo $\exists$ carte

$$\begin{tikzcd} U(p) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & W(f(p)) \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

t.c. $F(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$.

Dim.: no. $\square$

Def.: $f: M \to N$, $p \in M$ è PUNTO REGOLARE se f è sommersione in p; $q \in N$ è VALORE REGOLARE se $f^{-1}(q)$ ha solo punti regolari.

Teo.: $q \in N$ valore regolare $\Rightarrow S = f^{-1}(q) \subseteq M$ è una sottovarietà (se è $\neq \emptyset$), $\dim S = \dim M - \dim N$; $\forall p \in S$, $T_pS = \mathrm{Ker}(df_p: T_pM \to T_qN)$.

Dim.: $p \in S$. Forma normale:

$$\begin{tikzcd} U \cap S \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d] & U(p) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & W(q) \arrow[d, "\psi"] \\ 0 \times \mathbb{R}^{m-n} \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$p \mapsto 0$, $q \mapsto 0$ $\Rightarrow S$ è sottovarietà.

vedi oss. sotto

$$\begin{tikzcd} T_pS \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & T_pM \arrow[r, "df_p"] \arrow[d, "d\varphi_p"] & T_qN \arrow[d, "d\psi_q"] \\ & \mathbb{R}^m \arrow[r, "dF_0 = F"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

, concludere per ex.. $\square$

Es.: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^2 + \dots + x_n^2$, $0 \in \mathbb{R}^n$ è l'unico pto critico $\Rightarrow 0 \in \mathbb{R}$ unico valore critico. $1 \in \mathbb{R}$ valore regolare, $f^{-1}(1) = S^{n-1}$ è sottovarietà.

Inoltre $\forall x \in S^{n-1}$ $T_xS^{n-1} = \mathrm{Ker}\, df_x$; $df_x = \mathrm{grad} f_x = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}\, df_x = x^\perp$.

Oss.: se $S \subseteq M$ sottovarietà, $\forall p \in S$ $T_pS \subseteq T_pM$ in modo naturale.

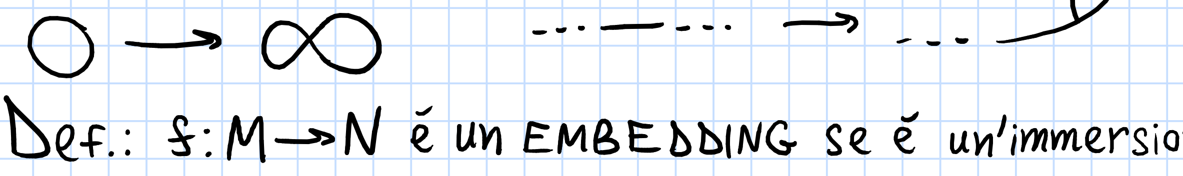
$v \in T_pS$ derivazione, se $f \in C^\infty(U^M(p))$, $v(f) := (f_{|U^M(p) \cap S}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ posso pensare $v \in T_pM$.

In particolare, se $S \subseteq \mathbb{R}^n$ sottovarietà, $\forall p \in S$ $T_pS \subseteq T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

Immersioni

$S^1 \to \mathbb{R}$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$



Def.: $f: M \to N$ è un EMBEDDING se è un'immersione iniettiva che è omeomorfismo con l'immagine, cioè $f: M \to f(M)$ omeo..

Ex.: se f è un'immersione iniettiva propria, allora è un embedding.

↳ $f^{-1}(\text{cpt})$ è cpt

Cor.: se M è cpt, ogni $f: M \to N$ immersione iniettiva è embedding.