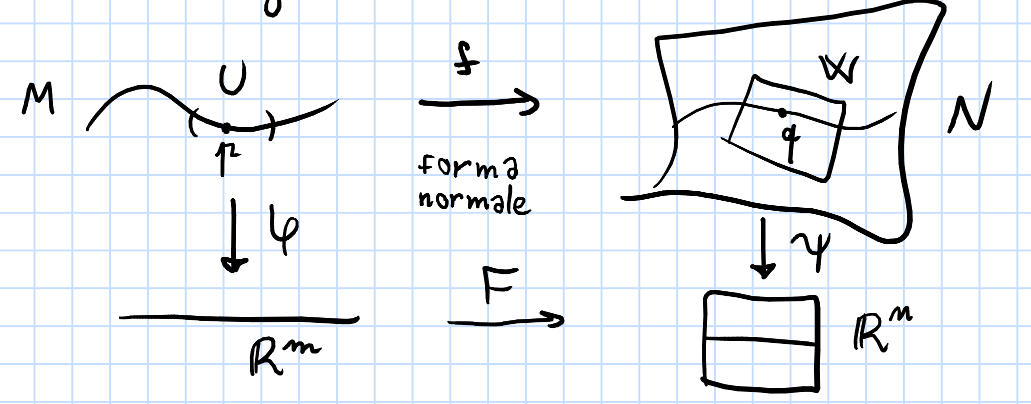
Prop.: immagine di embedding è una sottovarietà.

Dim.:



$\psi(W, W\cap S) \supseteq (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. ↱ a meno di restringere gli intorni

$f: M \to f(M)$ aperta $\Rightarrow$ l'altra inclusione. □

Es.: $m \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, mt)$ è un embedding.

Se $m = p/q$, $p,q \in \mathbb{Z}$, $(p,q)=1$ ↓ F ↓ questo non è embedding, ma essendo rivestimento è immersione

$\mathbb{R}/q\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{emb.}} \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T$

Ex.: se $m \in \mathbb{Q}$ $\mathrm{Im}\, F$ si richiude (è periodica), se $m \notin \mathbb{Q}$ no (è iniettiva).
$\Downarrow$ cpt, sottovarietà ; $\Downarrow$ immagine densa

Gruppi di Lie

Def.: un GRUPPO DI LIE è una varietà liscia G che è anche un gruppo t.c.
$G \times G \to G$, $(a,b) \mapsto ab$, $\quad G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ lisce.

Es.: V $\mathbb{R}$-s.v. di dim. n è gruppo di Lie. Oss.: $W \subseteq V$ sottos.v. è sottovarietà.

Es.: $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,n) \mid \det(A) \neq 0\}$, $\dim = n^2$.
$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,n) \mid \det(A) = 1\} \subseteq GL(n,\mathbb{R})$. Vediamo che è sottovarietà: $GL(n,\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}$, $A \mapsto \det(A)$,
$SL(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ e 1 è valore regolare.
$A \in SL(n,\mathbb{R})$, voglio A punto regolare.
$d\det_A : T_A GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
$\quad \| \; M(n,n)$, $B \mapsto ?$

$\det(A+tB) = \det(Id + tBA^{-1}) = 1 + t\, \mathrm{tr}(BA^{-1}) + o(t)$.
$d\det_A(B) = \mathrm{tr}(BA^{-1})$ ed è facile vedere che è suriettivo.

Cor.: $T_{Id} SL(n,\mathbb{R}) = \{B \in M(n,n) \mid \mathrm{tr}(B) = 0\}$.

Es.: $O(n) = \{A \mid {}^{T}AA = Id\}$. $O(n) \subseteq M(n,n)$ sottovarietà di dim. $\frac{n(n-1)}{2}$.
$M(n,n) \xrightarrow{F} S(n) = \{A \mid {}^{T}A = A\}$, $A \mapsto {}^{T}AA$
$O(n) = F^{-1}(Id)$, Id è valore regolare.
$F(A+tB) = {}^{T}(A+tB)(A+tB) = {}^{T}AA + t({}^{T}BA + {}^{T}AB) + o(t) \Rightarrow$
$\Rightarrow dF_A : M(n,n) \to S(n)$, $B \mapsto {}^{T}BA + {}^{T}AB$. Ex.: è suriettiva.
$T_{Id} O(n) = A(n) = \{B \in M(n,n) \mid {}^{T}B = -B\}$.

Def.: $M^k(m,n) = \{A \in M(m,n) \mid \mathrm{rk}\, A = k\}$. È una sottovarietà di dim. $mn - (m-k)(n-k)$ $(0 \le k \le m,n)$.
$P_0 \in M^k(m,n)$, WLOG $P_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$, A_0 matrice $k\times k$ invertibile.
↳ vicino a P_0
$P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B \\ 0 & Id_{n-k} \end{pmatrix} \in M(n,n)$.
$PQ = \begin{pmatrix} Id_k & 0 \\ CA^{-1} & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix} \in M(m,n)$.
Q invertibile $\Rightarrow \mathrm{rk}\, P = \mathrm{rk}\, PQ$. $\mathrm{rk}\, P = k \Leftrightarrow D = CA^{-1}B$,
cioè localmente $M^k(m,n)$ è un grafico $\Rightarrow$ è sottovarietà.

Partizione dell'unità

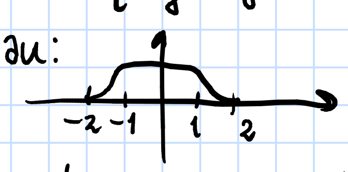
Def.: un ATLANTE ADEGUATO per M è un atlante $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n\}$ t.c.
1) è loc. finito: $\forall p \in M \; \exists U(p)$ t.c. $\#\{i \mid U_i \cap U(p) \neq \emptyset\} < +\infty$;
2) $\{\underbrace{\varphi_i^{-1}(B^n)}_{V_i}\}$ è ancora un ricoprimento.

Teo.: dato un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di M $\exists$ un atlante adeguato $\mathcal{A} = \{\varphi_j : U'_j \to \mathbb{R}^n\}$ t.c. $\{U'_j\}$ RAFFINA $\{U_i\}$, cioè ogni U'_j è contenuto in un U_i. Dim.: no. □

Def.: sia $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di M. Una PARTIZIONE DELL'UNITÀ subordinata al ricoprimento è una collezione $\{\rho_i : M \to \mathbb{R}_{\ge 0}\}_{i \in I}$ t.c.
1) $\mathrm{supp}\, \rho_i \subseteq U_i$; 2) $\forall p \in M \; \exists U(p)$ t.c. solo un numero finito di ρ_i non è identicamente nulla su $U(p)$ e $\sum \rho_i(p) = 1$.

Prop.: dato $\{U_i\}_{i\in I}$ $\exists$ partizione dell'unità subordinata.

Dim.: sia $\{\varphi_j : U'_j \to \mathbb{R}^n\}$ adeguato che raffina $\{U_i\}$.

Plateau: 

. In generale: $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, $\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \|x\| \le 1 \\ 0 & \text{se } \|x\| \ge 2 \end{cases}$.

$\rho_j : U'_j \to \mathbb{R}$, $\rho_j = \lambda \circ \varphi_j$. Estendo a $\rho_j : M \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ ponendo $\rho_j(q) = 0$ $\forall q \in M \setminus U'_j$. Manca solo che la somma faccia 1.
$\forall p \in M$, $\sum \rho_j(p) \ge 1$, quindi basta prendere $\bar{\rho}_k(q) = \frac{\rho_k(q)}{\sum \rho_j(q)}$. □