Def.: M varietà, $S \subseteq M$ sottoinsieme. $f: S \to N$ (N varietà) è LISCIA se $\forall p \in S$ $\exists F: U(p) \to N$ liscia t.c. $F_{|U \cap S} = f_{|U \cap S}$.

Prop.: M varietà, $S \subseteq M$ chiuso, $f: S \to \mathbb{R}^n$ liscia $\Rightarrow$ $\Rightarrow \exists F: M \to \mathbb{R}^n$ liscia t.c. $F_{|S} = f$.

Dim.: $\forall p \in S$ $\exists U(p) \xrightarrow{f_p} \mathbb{R}^n$ che estende f localmente.
$\{U(p)\}_{p \in S} \cup \{M \setminus S\}$ ricoprimento di $M \rightsquigarrow \{\rho_p\} \cup \{\rho\}$ partizione dell'unità. $F: M \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \sum_{p \in S} \rho_p(x) f_p(x)$ è loc. finita $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ben def. e liscia.
Se $x \in S$, $F(x) = \sum_{p \in S} \rho_p(x) f_p(x) = f(x) \sum_{p \in S} \rho_p(x) = f(x)$. $\square$

Prop.: $f: M \to \mathbb{R}^n$ continua; $\forall \varepsilon: M \to \mathbb{R}_{>0}$ continua $\exists F: M \to \mathbb{R}^n$ liscia t.c. $\|F(x) - f(x)\| < \varepsilon(x)$. Se $\exists S \subseteq M$ chiuso t.c. $f_{|S}$ è liscia, posso chiedere $F_{|S} = f_{|S}$.

Dim.: è vero localmente: $\forall x \in S$ $\exists f_x: U(x) \to \mathbb{R}^n$ estensione liscia di $f_{|S}$ t.c. $f_{x|U \cap S} = f_{|U \cap S}$. A meno di restringere $U(x)$ ottengo $\|f_x(y) - f(y)\| < \varepsilon(y)$ $\forall y \in U$.
Se $x \notin S$, $f_x: \underbrace{U(x)}_{\cap S = \emptyset} \to \mathbb{R}^n$, $y \mapsto f(x)$. $\{U(x)\}_{x \in M} \rightsquigarrow \{\rho_x\}$.
$F(y) = \sum_{x \in M} \rho_x(y) f_x(y)$.
Se $y \in S$, $F(y) = f(y)$ come prima.
$y \in M$, $\|F(y) - f(y)\| = \left\| \sum_{x \in M} \rho_x(y)(f_x(y) - f(y)) \right\| < \varepsilon(y)$. $\square$

Esaustione liscia

Prop.: M^m, $\exists f: M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ liscia t.c. $f^{-1}([0,T])$ cpt $\forall T \geq 0$.

Dim.: $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ricoprimento loc. finito t.c. $\overline{U_i}$ cpt (ex.: esiste).
$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \rho_i(x) i$. Ex.: funziona. $\square$

Teoremi di Whitney

Teo.: M^m cpt $\Rightarrow \exists$ embedding $M^m \hookrightarrow \mathbb{R}^N$.

Dim.: $\lambda: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } \|x\| \geq 2 \\ 1 & \text{se } \|x\| \leq 1 \end{cases}$ ($\in (0,1)$ se $1 < \|x\| < 2$). Consideriamo un atlante adeguato
$V_i = \varphi_i^{-1}(B^m)$
$\{\varphi_i: U_i \to \mathbb{R}^m\}$; loc. finito $\overset{M \text{ cpt}}{\Longrightarrow}$ finito. $i = 1, \dots, k$,
$\lambda_i: M \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda \circ \varphi_i(x)$, $\lambda_i \equiv 0$ fuori da U_i, $\lambda_i \equiv 1$ su V_i.
$\psi_i: M \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto \lambda_i(x) \varphi_i(x)$.
$F: M \to \mathbb{R}^N$, $x \mapsto (\lambda_1(x), \dots, \lambda_k(x), \psi_1(x), \dots, \psi_k(x))$, $N = k(m+1)$.
È un embedding: ovviamente è liscia. È iniettiva: se $x_1 \neq x_2 \in M$, $F(x_1) = F(x_2)$. $x \in V_i \Leftrightarrow \lambda_i(x) = 1$. Allora $\exists V_i$ t.c. $x_1, x_2 \in V_i$. $\psi_i = \varphi_i$ su V_i, ma φ_i diffeo. $\Rightarrow$ iniettiva, assurdo.
F immersione: $\forall x \in M$ $\exists V_i$ t.c. $x \in V_i$, $\psi_i = \varphi_i$ su V_i $\Rightarrow d(\psi_i)_x = d(\varphi_i)_x$,
φ_i diffeo. $\Rightarrow \operatorname{rk} d(\varphi_i)_x = m \Rightarrow \operatorname{rk} dF_x = m$.
M cpt $\Rightarrow$ embedding. $\square$

Teo. (immersione di Whitney): $f: M^m \to \mathbb{R}^n$ (continua), $n \geq 2m$, $\exists F: M^m \to \mathbb{R}^n$ immersione che approssima f (cioè $\forall \varepsilon: M \to \mathbb{R}_{>0}$ $\exists F: M^m \to \mathbb{R}^n$ immersione t.c. $\|F(x) - f(x)\| \leq \varepsilon(x)$).

Cor.: $\exists$ $F: M^m \to \mathbb{R}^n$ (immersione) se $n \geq 2m$.

Dim. (del teo.): $\mathcal{A} = \{\varphi_i: U_i \to \mathbb{R}^m\}_{i \in \mathbb{N}}$ adeguato.
$M_i = \bigcup_{j=1}^{i} V_j$, $\overline{M_i}$ cpt.

1) Posso prendere f liscia.
2) Costruisco $f = F_0, F_1, F_2, \dots$ $F_i: M^m \to \mathbb{R}^n$ liscia t.c.
   i) $\forall p \in M$ $\|F_i(p) - f(p)\| < \varepsilon(p)$;
   ii) F_i e F_{i-1} coincidono fuori da U_i;
   iii) $(dF_i)_p$ è iniettivo $\forall p \in \overline{M_i}$.
3) $F(x) = F_i(x)$ per i abbastanza grande.

... TO BE CONTINUED