Insiemi di misura nulla

M varietà. Boreliano: insieme costruito dagli aperti tramite complementare e unione e intersezione numerabili.

Def.: un boreliano $S \subseteq M$ ha MISURA NULLA $\Leftrightarrow \forall p \in S\ \exists\, U(p) \xrightarrow{\varphi} V \subseteq \mathbb{R}^n$ carta t.c. $\varphi(U \cap S)$ ha misura nulla.

$\exists \Rightarrow \forall$ perché gli insiemi di misura nulla sono preservati dai diffeo..

Prop.: $f: M^m \to N^n$, $m < n \Rightarrow f(M)$ ha misura nulla.

Dim.: basta vederlo in carte: $\mathbb{R}^m \supseteq V \xrightarrow{F} Z \subseteq \mathbb{R}^n$, Sard $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ i valori non regolari hanno misura nulla. $\operatorname{Im} F$ è fatta di valori non regolari (dF_p non può essere suri.).

Allora $f(M) \subseteq N$ ha misura nulla $\Rightarrow$ ha parte interna vuota. $\square$

... (riprende la dim. di immersione di Whitney)

Sia $\lambda: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{se } \|x\| \leq 1 \\ \in (0,1) & \text{se } 1 < \|x\| < 2 \\ 0 & \text{se } \|x\| \geq 2 \end{cases}$, $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^m\}$ atlante adeguato,

$V_i = \varphi_i^{-1}(B^n)$, $M_i = \bigcup_{j \leq i} V_j$, $\overline{M}_i$ cpt.

Costruiamo le F_i dell'altra volta: F_0 liscia e vicina a f.

$$\lambda_i : M \to \mathbb{R},\ p \mapsto \lambda(\varphi_i(p)), \qquad \psi_i : M \to \mathbb{R}^m,\ p \mapsto \lambda_i(p)\varphi_i(p).$$

$F_i(x) := F_{i-1}(x) + A\,\psi_i(x)$, $A \in M(n,m)$ da determinare, $\|A\|$ piccola. Così abbiamo le proprietà i) e ii).

$d(F_i)_x = d(F_{i-1})_x + A\, d(\psi_i)_x$, se $\|A\|$ è piccola mantengo l'iniettività in $\overline{M}_{i-1}$.

$p \in \overline{V}_i$ cpt, $\psi_i|_{\overline{V}_i} = \varphi_i|_{\overline{V}_i} \Rightarrow d(\psi_i)_p = d(\varphi_i)_p$ è invertibile $\Rightarrow$
$\Rightarrow d(F_i \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)} = d(F_{i-1} \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)} + A$.

$\operatorname{rk}(dF_{i-1})_p = \operatorname{rk}(dF_i \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)}$, quindi cerco A t.c. $\operatorname{rk}\underbrace{(dF_i \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)}}_{B}$ sia massimo (cioè m) $\forall p$.

Vogliamo evitare che $\operatorname{rk} B = k < m$.

$$M^k(n,m) \times U_i \xrightarrow{\Phi_k} M(n,m), \qquad (B, p) \longmapsto B - d(F_{i-1} \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(p)}.$$

$k < m$, $n \geq 2m \Rightarrow mn - (n-k)(m-k) + m < nm \Rightarrow \operatorname{Im} \Phi_k$ ha misura nulla $\Rightarrow \operatorname{Im} \Phi_0 \cup \ldots \cup \operatorname{Im} \Phi_{m-1}$ ha misura nulla.

Si sceglie A che non sta in questo insieme. $\square$

Teo. (immersione iniettiva di Whitney): $\forall f: M^m \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2m+1$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists F: M \to \mathbb{R}^n$ immersione iniettiva t.c. $\|F(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

Dim.: no. $\square$

Cor. (embedding di Whitney): $\forall M^n$ $\exists$ embedding $F: M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ proprio.

Dim.: prendo $f: M^n \to \mathbb{R}^n$ propria. $\exists g: M \to \mathbb{R}$ esaustione liscia $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ propria, prendo $f(p) = (g(p), 0, \ldots, 0)$. Ex.: g propria $\Rightarrow f$ propria.
Per immersione iniettiva ho F immersione iniettiva, dista poco da f che è propria $\Rightarrow$ è propria $\Rightarrow$ embedding. $\square$

Ex.: $f: M \to N$ embedding è propria $\Leftrightarrow f(M) \subseteq N$ chiuso.

Teo. (Whitney strong): $\exists M^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ embedding. Dim.: no. $\square$

Fatto: M^n cpt non ori., $\nexists M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ embedding.

Algebra multilineare

$V_1, \ldots, V_k, W$ s.v. di dim. finita su $\mathbb{R}$. se $W = \mathbb{R}$, si omette

$\mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_k; W) = \{ f: V_1 \times \ldots \times V_k \to W \text{ multilineare} \}$.

$\mathcal{B}_i = \{v^i_1, \ldots, v^i_{n_i}\}$ base di V_i, $\{w_1, \ldots, w_n\}$ base di W.

Ogni f è t.c. $f(v^1_{j_1}, \ldots, v^k_{j_k}) = \sum_{j=1}^n F^j_{j_1, \ldots, j_k} w_j$, $F^j_{j_1, \ldots, j_k}$ coefficienti che determinano $f \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim \mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_k; W) = \dim(V_1) \cdot \ldots \cdot \dim(V_k) \cdot \dim(W)$.

Prodotto tensoriale

V, W s.v., $V \otimes W = \mathrm{Mult}(V^*, W^*)$.

Def.: $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k := \mathrm{Mult}(V_1^*, \ldots, V_k^*)$.

Lemma: $V \hookrightarrow V^{**}$, $v \mapsto (f \mapsto f(v))$ è sempre ini., suri. $\Leftrightarrow \dim V < +\infty$.

Def.: $v_i \in V_i$, $v_1 \otimes \ldots \otimes v_k \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$,
$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k)(w_1^*, \ldots, w_k^*) = w_1^*(v_1) \cdot \ldots \cdot w_k^*(v_k)$.

Prop.: date basi $\mathcal{B}_i$ come sopra, $\{v^1_{j_1} \otimes \ldots \otimes v^k_{j_k}\}$ è base di $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$.

Prop. (proprietà universale del prodotto tensore):

$$\mathrm{Hom}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_k, W) \to \mathrm{Mult}(V_1, \ldots, V_k; W), \qquad T \longmapsto ((v_1, \ldots, v_k) \mapsto T(v_1, \ldots, v_k))$$

è isomorfismo.

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \ldots \times V_k \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & V_1 \otimes \ldots \otimes V_k \arrow[dl, "\exists!\, g \text{ t.c. } f = g \circ \pi"] \\ W & \end{tikzcd}$$

$V \otimes W \cong W \otimes V$, $v \otimes w \mapsto w \otimes v$; è ben posta: $f(v, w) = v \otimes w$,

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & V \otimes W \arrow[dl, "g"] \\ W \otimes V & \end{tikzcd}$$

$\exists!\, g$, è l'iso. cercato.

Anche: $(V \otimes W) \otimes U = V \otimes (W \otimes U)$. $V \otimes \mathbb{R} = V$ $(v \otimes 1 \leftrightarrow v)$.

Prop.: $\exists$ isomorfismo canonico $\mathrm{Hom}(V, W) = V^* \otimes W = W \otimes V^*$.

$$\begin{tikzcd} (v \mapsto v^*(v) \cdot w) & v^* \otimes w \arrow[l, mapsto] \arrow[d, mapsto] \\ & (v^*, w) \arrow[ul, mapsto] \end{tikzcd}$$

In particolare, $\mathrm{End}(V) = V^* \otimes V$.

Tensore

$h, k \geq 0$ interi. Def.: un TENSORE di tipo (h,k) è un elemento di $\mathcal{T}^k_h(V) := \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{h} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{k}$, cioè una funzione multilineare

$$T: \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{h} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k} \to \mathbb{R}.$$

Es.:
- $(0,0) \rightsquigarrow T \in \mathbb{R}$ numero;
- $(1,0) \rightsquigarrow T \in V$ vettore;
- $(0,1) \rightsquigarrow T \in V^*$ covettore;
- $(1,1) \rightsquigarrow T \in V \otimes V^* = \mathrm{End}(V)$;
- $(0,2) \rightsquigarrow T \in V^* \otimes V^* = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{funzioni bilineari}}}{\mathrm{Bil}(V)}$ (prodotti scalari).

Useremo: $(0,k) \rightsquigarrow T \in \mathrm{Mult}^k(V)$, es.: $\det: \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è di tipo $(0,n)$.

$(1,k) \rightsquigarrow T \in \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{k} \otimes V = \mathrm{Mult}(\underbrace{V, \ldots, V}_{k}; V)$.

In generale, $\mathcal{T}^k_h(V) = \mathrm{Mult}(\underbrace{V, \ldots, V}_{k}; \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{h})$ (ex.).