$T \in \mathcal{T}^k_h(V)$, $T: \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{h} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k} \to \mathbb{R}$,

$$\underbrace{V \times \ldots \times V}_{k} \xrightarrow{T} \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{h}.$$
$$(v_1, \ldots, v_k) \longmapsto T(\cdot, \ldots, \cdot, v_1, \ldots, v_k)$$

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\times} \mathbb{R}^3$ (prodotto vettore) è $(1,2)$.

Vedremo: $(1,3)$ tensore di Riemann.

$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base di $V \rightsquigarrow \{v^1, \ldots, v^n\}$ base duale di $V^*$, $v^i(v_j) = \delta^i_j$.

$\{v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_h} \otimes v^{j_1} \otimes \ldots \otimes v^{j_k}\}$ base di $\mathcal{T}^k_h(V)$.

$\mathcal{T}^k_h(V) \ni T = T^{i_1, \ldots, i_h}_{j_1, \ldots, j_k} v_{i_1} \otimes \ldots \otimes v_{i_h} \otimes v^{j_1} \otimes \ldots \otimes v^{j_k}$.

notazione di Einstein per le sommatorie

Es.: $V \ni v = v^i v_i$.

da non confondere con gli elementi della base duale di $V^*$

$T: V \to V$, $T(v) = w$, $T^j_i v^i = w^j$.

$\mathrm{End}(V) = V^* \otimes V$

$g$ prodotto scalare su $V$ $(0,2)$, $g(v,w) = v^i g_{ij} w^j$.

$\mathrm{tr}\, T = T^i_i$.

Cambiamo base: $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$, $\mathcal{C}^* = \{w^1, \ldots, w^n\}$ per $V^*$.

$w_i = A^j_i v_j$. → i vettori delle basi

→ i covettori delle basi

Prop.: $w_i = A^j_i v_j \Rightarrow w^i = B^i_j v^j$ con $B$ t.c. $A^i_j B^j_k = \delta^i_k = B^i_j A^j_k$. Dim.: no. $\square$

Prop.: $T \in \mathcal{T}^k_h(V)$, $\hat{T}^{i_1, \ldots, i_h}_{j_1, \ldots, j_k}$ coordinate nella nuova base $\Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{T}^{i_1, \ldots, i_h}_{j_1, \ldots, j_k} = A^{m_1}_{j_1} \cdot \ldots \cdot A^{m_k}_{j_k} B^{i_1}_{l_1} \cdot \ldots \cdot B^{i_h}_{l_h} T^{l_1, \ldots, l_h}_{m_1, \ldots, m_k}$. Dim.: no. $\square$

$T \in \mathcal{T}^k_h(V)$, $U \in \mathcal{T}^{k'}_{h'}(V)$, $T \otimes V \in \mathcal{T}^{k+k'}_{h+h'}(V) = \mathcal{T}^k_h(V) \otimes \mathcal{T}^{k'}_{h'}(V)$.

In coordinate: $(T \otimes U)^{i_1, \ldots, i_h, \ldots, i_{h+h'}}_{j_1, \ldots, j_k, \ldots, j_{k+k'}} = T^{i_1, \ldots, i_h}_{j_1, \ldots, j_k} \cdot U^{i_{h+1}, \ldots, i_{h+h'}}_{j_{k+1}, \ldots, j_{k+k'}}$.

## Contrazione

$T \in \mathcal{T}^k_h(V)$, $h, k \geq 1$; fisso $1 \leq i \leq h$, $1 \leq j \leq k$.

$T \in \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{h} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{k} = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{h-1} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{k-1} \otimes \overbrace{V \otimes V^*}^{\text{lo mando in } \mathbb{R}: V \otimes V^* = \mathrm{End}(V)\text{, uso la traccia}} \to$

ho spostato l'$i$-esimo e il $j$-esimo

$V \otimes V^* \to \mathbb{R}$

$(v, v') \longmapsto v'(v)$

$\to \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{h-1} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{k-1}$. Ho una mappa

$$C: \mathcal{T}^{k-1}_{h-1}(V) \otimes V \otimes V^* \to \mathcal{T}^{k-1}_{h-1}(V);$$
$$v \otimes u \otimes w \longmapsto w(u) \otimes v$$

in coordinate: $C(T)^{i_1, \ldots, i_{h-1}}_{j_1, \ldots, j_{k-1}} = T^{i_1, \ldots, l, \ldots, i_{h-1}}_{j_1, \ldots, l, \ldots, j_{k-1}}$.

→ posizione $i$

→ posizione $j$

$g(v,w) = v^i g_{ij} w^j$. $g \otimes v \otimes w$ $(2,2)$ di coordinate $v^a g_{bc} w^d$; allora il prodotto scalare è una contrazione.

Def.: l'ALGEBRA TENSORIALE di $V$ è $\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{h,k \geq 0} \mathcal{T}^k_h(V)$.

Def.: un PRODOTTO SCALARE su $V$ è un tensore $g$ $(0,2)$ simmetrico ($g(v,w) = g(w,v)\ \forall v, w \in V$) non degenere ($\nexists v \neq 0$ t.c. $g(v,w) = 0\ \forall w \in V$).

Teo.: $g$ ha segnatura $(p, m)$, $p + m = n$.

Def.: $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base di $V$ è ORTONORMALE per $g$ se $g(v_i, v_j) = \pm \delta^j_i$. Se $\# + = p$, $\# - = m$ $\left( g_{ij} = \begin{pmatrix} \underbrace{-1 \ \ddots \ -1}_{m} & 0 \\ 0 & \underbrace{1 \ \ddots \ 1}_{n} \end{pmatrix} \right)$, $g$ ha segnatura $(p, m)$.

Ex.: $\begin{array}{c} V \to V^* \\ v \mapsto (w \mapsto g(v,w)) \end{array}$ è isomorfismo $\rightsquigarrow \mathcal{T}^k_h(V) \cong \mathcal{T}^0_{h+k}(V)$.

In coordinate (caso da $(3,0)$ a $(1,2)$): $U \mapsto T$, $U^{ijk} \mapsto$

$\mapsto T^a{}_{bc} = U^{ajk} g_{jb} g_{kc}$.

$g^{ij}$ è l'inversa di $g_{ij}$ ($g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k = g_{kj} g^{ji}$).

Se $g$ è def. positivo e $\mathcal{B}$ è ortonormale, $g_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow$

$\Rightarrow U^{ajk} \delta_{jb} \delta_{kc} = U^{abc}$.

## Tensori (anti-)simmetrici

$V$, $T \in \mathcal{T}^k_0(V) = \mathcal{T}^k(V)$.

Def.: $T$ è SIMMETRICO se $T(v_1, \ldots, v_k) = T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$,

ANTI- " se $T(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$ ".

Oss.: $T$ è simmetrico $\Leftrightarrow T_{i_1, \ldots, i_k} = T_{i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(k)}}\ \forall \sigma$,

anti- " $\Leftrightarrow T_{i_1, \ldots, i_k} = \mathrm{sgn}(\sigma) T_{i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(k)}}\ \forall \sigma$.

$T \in \mathcal{T}^k_0(V)$, $S(T) \in \mathcal{T}^k_0(V)$, $S(T)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$;

in coordinate: $S(T)_{i_1, \ldots, i_k} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} T_{i_{\sigma(1)}, \ldots, \sigma(k)}$.

$A(T) \in \mathcal{T}^k_0(V)$, $A(T)(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$.

$T_1, \ldots, T_k$ simmetrici, $T_i \in \mathcal{T}^{m_i}(V)$.

$S(T_1 \otimes \ldots \otimes T_k) \in \mathcal{T}^m(V)$, $m = m_1 + \ldots + m_k$.

$T_1 \odot \ldots \odot T_k := \binom{m}{m_1, \ldots, m_k} S(T_1 \otimes \ldots \otimes T_k)$.

$T_1, \ldots, T_k$ anti-simm., $T_1 \wedge \ldots \wedge T_k := \binom{m}{m_1, \ldots, m_k} A(T_1 \otimes \ldots \otimes T_k)$.

Prop.: i prodotti sono associativi. Dim.: no. $\square$

$S^k(V) \subseteq \mathcal{T}^k(V)$ simm., $\Lambda^k(V) \subseteq \mathcal{T}^k(V)$ anti-simm..

$S^*(V) = \bigoplus_{k \geq 0} S^k(V)$, $\Lambda^*(V) = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k(V)$. $\Lambda^*(V)$ si chiama ALGEBRA ESTERNA di $V$.

$\cap$ $\cap$

$\mathcal{T}^*(V) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{T}^k(V)$ $\mathcal{T}^*(V)$

($\mathcal{T}_*(V)$ analogo)

Oss.: $\Lambda^1(V) = S^1(V) = \mathcal{T}^1(V) = V^*$, $\Lambda^2(V) \oplus S^2(V) = \mathcal{T}^2(V)$.

Es.: $v, w \in \Lambda^1(V)$, $v \wedge w = v \otimes w - w \otimes v$.

Prop.: $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base di $V \rightsquigarrow \{v^1, \ldots, v^n\}$ base di $V^* \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \{v^{i_1} \otimes \ldots \otimes v^{i_k}\}$ base di $\mathcal{T}^k(V)$.

$\{v^{i_1} \odot \ldots \odot v^{i_k}\}_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n}$ base di $S^k(V)$.

$\{v^{i_1} \wedge \ldots \wedge v^{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$ base di $\Lambda^k(V)$. Dim.: no. $\square$

Oss.: $v, w \in \Lambda^1(V)$, $v \wedge w = -w \wedge v \Rightarrow v \wedge v = 0$.

Cor.: $\dim \Lambda^*(V) = 2^n$.

Cor.: $T \in \Lambda^k(V)$, $U \in \Lambda^h(V)$, $T \wedge U = (-1)^{kh} U \wedge T$.