Fibrati

Def.: sia F^k una varietà, un FIBRATO con fibra F è $\pi : E^{n+k} \to B^n$ mappa (liscia) tra varietà t.c. $\forall p \in B \; \exists \, U(p)$ INTORNO BANALIZZANTE $\exists \varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ diffeo. t.c.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$ commuta.

Oss.: se $\dim F = 0$ è la definizione di rivestimento (liscio).

Es.: FIBRATO BANALE: $E = B \times F \xrightarrow{\pi_1} B$ $(\varphi = id)$.

Def.: $\pi : E \to B$ fibrato con fibra F, la FIBRA su $p \in B$ è $E_p := \pi^{-1}(p) \cong F$.

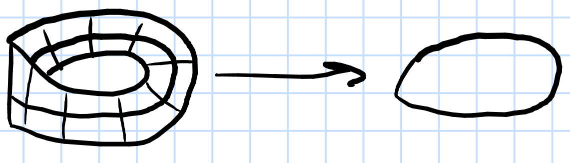
Def.: un FIBRATO VETTORIALE di rango k è un fibrato $\pi : E \to B$ con fibra $F = \mathbb{R}^k$, t.c. ogni E_p ha struttura di spazio vettoriale e

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

$\forall p \in B \, \exists \, p \in U(p)$, $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ t.c. commuta e $\varphi|_{E_q} : E_q \to \{q\} \times \mathbb{R}^k$ è un isomorfismo $\forall q \in U$.

Es.: fibrato vettoriale banale: $E = B \times \mathbb{R}^k$.

Es.:



Morfismi fra fibrati (vettoriali)

Def.: un MORFISMO fra fibrati vettoriali

$$\begin{tikzcd} E^{n+k} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] & E'_{n'+k'} \arrow[d, "\pi'"] \\ M^n \arrow[r, "f"] & M'_{n'} \end{tikzcd}$$

è una coppia di mappe f, F t.c.

1) il diagramma commuta;
2) $\forall p \in M$ $F|_{E_p} : E_p \to E'_{f(p)}$ è lineare.

Un ISOMORFISMO è un morfismo invertibile.

Def.: un fibrato $\begin{smallmatrix} E \\ \downarrow \pi \\ M \end{smallmatrix}$ è BANALE se è isomorfo a $\begin{smallmatrix} M \times \mathbb{R}^k \\ \downarrow \\ M \end{smallmatrix}$.

Es. (FIBRATO TAUTOLOGICO): $E = \{(l, v) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in l\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}P^n$, $(l, v) \longmapsto l$.

$\pi^{-1}(l) = \{(l, v) \mid v \in l\} = l$ s.v. di dim. 1.

Manipolazione di fibrati

$\begin{smallmatrix} E & & E' \\ & \searrow^{\pi} \; \swarrow^{\pi'} & \\ & M & \end{smallmatrix} \rightsquigarrow \begin{smallmatrix} E \oplus E' \\ \downarrow \\ M \end{smallmatrix} = \bigcup_{p \in M} E_p \times E'_p$, $\overline{\pi}^{-1}(p) = (E \oplus E')_p = E_p \times E'_p$.

$$\begin{tikzcd} \overline{\pi}^{-1}(p) \arrow[r, "\overline{\varphi}_p"] & \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'} \end{tikzcd} \quad E_p \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^k, \; E'_p \xrightarrow{\varphi'} \mathbb{R}^{k'}$$

Diamo una struttura liscia a $E \oplus E'$: $\forall p \; \exists \, U(p)$ trivializzante per E e E',

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (\pi')^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi'"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & U \times \mathbb{R}^{k'} \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

$\{\overline{\pi}^{-1}(U) : U \xrightarrow{\overline{\varphi}} U \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'}\} = \mathcal{A}$ è struttura liscia per $E \oplus E'$;
$\overline{\varphi}$ fornisce trivializzazione.

$\begin{smallmatrix} E \\ \downarrow \\ M \end{smallmatrix} \rightsquigarrow \begin{smallmatrix} E^* \\ \downarrow \\ M \end{smallmatrix} = \bigcup_{p \in M} (E_p)^*$, $(E^*)_p = (E_p)^*$.

$\begin{smallmatrix} E \otimes E' \\ \downarrow \\ M \end{smallmatrix}$, $(E \otimes E')_p = E_p \otimes E'_p$.

$\begin{smallmatrix} \mathrm{Hom}(E, E') \\ \downarrow \\ M \end{smallmatrix} = E^* \otimes E'$. $\quad \begin{smallmatrix} \mathcal{T}^k_h(E) \\ \downarrow \\ M \end{smallmatrix}$, $\mathcal{T}^k_h(E)_p = \mathcal{T}^k_h(E_p)$.

Def.: $\begin{smallmatrix} E^k \\ \downarrow \pi \\ M \end{smallmatrix}$ fibrato. Un sottoinsieme $E' \subseteq E$ è SOTTOFIBRATO se $\forall p \in M$ $\exists \, U(p)$ intorno banalizzante t.c. $\exists \, \varphi$

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^{k-h} \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

t.c. $\varphi(E' \cap \pi^{-1}(U)) = U \times \mathbb{R}^h \times \{0\}$.

Segue che:
1) $E' \subseteq E$ è sottovarietà;
2) $E'_p := E_p \cap E' \subseteq E_p$ è sottospazio;
3) $E' \xrightarrow{\pi} M$ è un fibrato.

Se $\overset{h}{E'} \subseteq \begin{smallmatrix} \overset{k}{E} \\ \downarrow \pi \\ M \end{smallmatrix}$ sottofibrato, il FIBRATO QUOZIENTE è E/E',
$(E/E')_p = E_p / E'_p$. Ha una struttura liscia e viene un fibrato.