$E' \subseteq E$ sottofibrato, abbiamo due morfismi di fibrati

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, hook] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d] & E/E' \arrow[d] \\ M \arrow[r, "id"] & M \arrow[r, "id"] & M \end{tikzcd}.$$

Se $N \subseteq M$ sottovar., $\begin{smallmatrix} E \\ \downarrow\pi \\ M \end{smallmatrix}$ fibrato, la RESTRIZIONE di E a N é $\begin{smallmatrix} E_{|N} = \pi^{-1}(N), \\ \downarrow\pi \\ N \end{smallmatrix}$ $(E_{|N})_p = E_p \ \forall p \in N$.

Più in generale, il PULL-BACK: $f^*E = \{(p,v) \in N \times E \mid f(p) = \pi(v)\}$.

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, dashed, "F"] \arrow[d, dashed, "\bar\pi"'] & E^{m+k} \arrow[d, "\pi"] \\ N^n \arrow[r, "f"] & M^m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (p,v) \arrow[r, mapsto, "F"] \arrow[d, mapsto, "\pi"'] & v \\ p \end{tikzcd}$$

$\bar\pi^{-1}(p) = \{(p,v) \mid v \in E_{f(p)}\} = E_{f(p)}$.

Prop.: $f^*E \subseteq N \times E$ é sottovar. e $\bar\pi$ è un fibrato.

Dim.: localmente, $\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$. Quindi, sempre localmente,

$f^*E = \{(p,q,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \mid f(p) = q\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ è $\text{graph}(f) \times \mathbb{R}^k \Rightarrow$ sottovarietà. Segue anche la locale banalizzazione. $\square$

Se $N \subseteq M$ sottovar., $\begin{tikzcd} i^*E \arrow[r, dashed] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[r, hook, "i"] & M \end{tikzcd}$, $i^*E = E_{|N}$.

Ex.: f cost. $\Rightarrow f^*E$ banale.

Fibrato tangente

Def.: M var., il FIBRATO TANGENTE di M è $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$. $\begin{smallmatrix} TM \\ \downarrow\pi \\ M \end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix} (p,v) \\ \downarrow \\ p \end{smallmatrix}$

Prendiamo una carta $U \xrightarrow{\varphi} V \subseteq \mathbb{R}^n$.

$\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\varphi_*} V \times \mathbb{R}^n$.

$(p,v) \longmapsto (\varphi(p), d\varphi_p(v))$

$A = \{\varphi_* : \pi^{-1}(U) \to V \times \mathbb{R}^n\}$ atlante per TM. È liscio.

Le mappe di transizione sono

$(\varphi_*)_{ij} = (\varphi_j)_* \circ (\varphi_i)_*^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$(x,v) \longmapsto (\varphi_j(\varphi_i^{-1}(x)), d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})_x(v))$

$\Rightarrow$ l'atlante è liscio; inoltre, le φ_* danno una trivializzazione.

Es.: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $T_pU = \mathbb{R}^n \Rightarrow TU = U \times \mathbb{R}^n$.

Domanda: TS^n è banale?

Sezioni

$\begin{smallmatrix} E \\ \downarrow\pi \\ M \end{smallmatrix}$ fibrato, una SEZIONE è $s : M \to E$ (liscia) t.c. $\pi \circ s = id_M$.

$\forall p \in M$, $s(p) \in E_p$.

Def.: un CAMPO VETTORIALE in M é una sezione di TM.

Def.: un FRAME su $\begin{smallmatrix} E^{m+k} \\ \downarrow\pi \\ M^m \end{smallmatrix}$ è il dato di k sezioni t.c. $\forall p \in M$ $s_1(p), \dots, s_k(p)$ sono una base di E_p.

Prop.: $\exists$ frame su $\begin{smallmatrix} E \\ \downarrow\pi \\ M \end{smallmatrix} \Leftrightarrow E$ è banale.

Dim.: $(\Leftarrow)$ E banale $\Leftrightarrow \begin{smallmatrix} E \cong M \times \mathbb{R}^k \\ \downarrow \\ M \end{smallmatrix}$. Per questo si prende $s_i(p) = (p, e_i)$.

$(\Rightarrow)$ $s_1, \dots, s_k$ frame, costruisco $\begin{tikzcd} M \times \mathbb{R}^k \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E \arrow[dl, "\pi"] \\ M \end{tikzcd}$,

$F(p,x) = \sum_{i=1}^{k} x^i s_i(p)$ è isomorfismo. $\square$

Teo.: S^n ha un campo mai nullo $\Leftrightarrow n$ è dispari. Dim.: vedi GTD. $\square$

Cor.: n pari $\Rightarrow TS^n$ non è banale.

Teo.: G gruppo di Lie $\Rightarrow TG$ è banale.

Dim.: $\forall g \in G$, sia $L_g : G \to G$, $h \mapsto gh$ diffeo..

$\{d(L_g)_e : T_eG \to T_gG\}_{g \in G}$, tutti i tangenti sono identificati con T_eG. Sia $v_1, \dots, v_k$ base di T_eG, $X_i(g) = (dL_g)_e(v_i)$.

$\downarrow \quad \downarrow$
$X_1, \dots, X_k$

$X_1, \dots, X_k$ è un frame. $\square$

Def.: se TM è banale, M è PARALLELIZZABILE.

Cor.: S^1 e S^3 sono parallelizzabili.

M var, TM fibrato tangente.

Def.: T^*M è il FIBRATO COTANGENTE, $(T^*M)_p = (T_pM)^*$.

Def.: $\mathcal{T}^k_h(M) = \mathcal{T}^k_h(TM)$ FIBRATO TENSORIALE (h,k).

Una sezione s di $\mathcal{T}^k_h(M)$ è il dato di $\forall p \in M$ $s(p) \in \mathcal{T}^k_h(T_pM)$ CAMPO TENSORIALE.

Se $f : M \to \mathbb{R}$ liscia, $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R} \Rightarrow df_p \in (T_pM)^*$.

df è sezione di T^*M.

Notazione: $\begin{smallmatrix} E \\ \downarrow\pi \\ M \end{smallmatrix}$ fibrato, $\Gamma E = \{$sezioni $s : M \to E\}$ è s.v. e anche un $C^\infty(M)$-modulo, cioè se $f \in C^\infty(M)$, $s \in \Gamma E$ ho $fs \in \Gamma E$, $(fs)(p) := f(p)s(p)$.

s_0 SEZIONE NULLA: $s_0(p) = 0 \in E_p$.

Ex.: ogni sezione è un embedding.

Si può identificare M con $s_0(M) \subseteq E$. Es.: .

Localmente, le sezioni sono funzioni a valori in $\mathbb{R}^k$.

Def.: $\begin{smallmatrix} E \\ \downarrow\pi \\ M \end{smallmatrix}$ fibrato, $S \subseteq M$ sottoinsieme, una SEZIONE PARZIALE con dominio S è $s : S \to E$ liscia t.c. $\pi \circ s = id_S$.

Ex.: ogni sezione parziale su $S \subseteq M$ chiuso si estende a una sezione globale (già visto per $f : S \to \mathbb{R}^k$) che è nulla fuori da un aperto qualsiasi $U \supseteq S$ fissato.