Fibrato normale

M^m var., $N^n \subseteq M^m$ sottovar.. Ho $\begin{array}{c} TN \\ \downarrow \\ N \end{array}$, $\begin{array}{c} TM_{|N} \\ \downarrow \\ N \end{array}$ fibrati: se $p \in N$, $(TN)_p = T_p \overset{n}{N} \subseteq T_p \overset{m}{M} = (TM_{|N})_p$. Quindi

$$\begin{tikzcd} TN \arrow[r] \arrow[d] & TM_{|N} \arrow[r] \arrow[d] & \nu N \arrow[d] \\ N \arrow[r, "id"] & N \arrow[r, "id"] & N \end{tikzcd}$$

$\nu N_p = T_pM / T_pN$, $\dim \nu N_p = m - n \Rightarrow$
$\Rightarrow \nu N$ è var. di dim. m.

Es.: $N^n \subseteq \mathbb{R}^m$, $T_pN \subseteq T_p\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$. $\underbrace{TN = \{(p,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mid p \in N, v \in T_pN\}}_{\dim = 2n} \subseteq$
$\subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ sottovar..

$\nu_p N = T_p\mathbb{R}^m / T_pN = \mathbb{R}^m / T_pN$. Usando $\langle , \rangle$ su $\mathbb{R}^m$, $W \subseteq \mathbb{R}^m$, ho $W^\perp \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^m = W \oplus W^\perp$. Allora $\nu_p N = T_pN^\perp$.

Allora $\underbrace{\nu N = \{(p,v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mid p \in N, v \in T_pN^\perp\}}_{\dim = m}$.

$N \times \mathbb{R}^m = T\mathbb{R}^m_{\ |N} = TN \oplus \nu N$.

Es.: $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$. $S^{n-1} \times \mathbb{R}^n = TS^{n-1} \oplus \nu S^{n-1}$. νS^{n-1} è banale: ha rango 1 e una sezione mai nulla ($\Rightarrow$ frame). $\forall x \in S^{n-1}$, $\nu_x S^{n-1} = (T_x S^{n-1})^\perp =$
$= (x^\perp)^\perp = \operatorname{span}\{x\} \Rightarrow s(x) = x$ è sezione mai nulla.

Def.: M^n var.. Un TENSORE METRICO di segnatura (p,m) è una sezione $g \in \Gamma \mathcal{T}_0^2(M)$ (cioè $\forall p$ $g(p) \in \mathcal{T}_0^2(T_pM)$, $g(p): T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$) t.c. $\forall p \in M$ $g(p)$ sia $\underset{\text{(prodotto scalare)}}{\text{simmetrico}}$ con segnatura (p,m), $p+m=n$.

Il tensore metrico g è RIEMANNIANO se $(p,m) = (n,0)$, è LORENTZIANO se $(p,m) = (n-1,1)$.

Stesse def. per qualsiasi fibrato di rango k, con $p+m=k$.

Prop.: ogni $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ M \end{array}$ ha un tensore metrico riemanniano.

Dim.: siano $\{U_i$ trivializzanti$\}$ che ricoprono M.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\varphi_i", "\sim"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_i \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_i"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

$\varphi_{i|E_p}: E_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^k$. $\forall p \in U_i$, se g^E è il prodotto scalare euclideo su $\mathbb{R}^k$, lo trasporto in $g_i(p)$ su E_p.

Definisco $g \in \Gamma \mathcal{T}_0^2(E)$: sia $\underbrace{\{\rho_i\}}_{\text{part. dell'unità}}$ subordinata a $\{U_i\}$, $g = \sum \rho_i g_i$.

È facile vedere che $g(p)$ è simm. e def. pos.. $\square$

In relatività generale l'universo è una 4-varietà lorentziana (cioè con g lorentziano sul tangente). Una VARIETÀ RIEMANNIANA è una M dotata di tensore metrico riemanniano.

$$\begin{tikzcd} \overset{h}{E'} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \overset{k}{E} \arrow[r] \arrow[d] & E/E' \arrow[d] \\ M \arrow[r] & M \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

Se E ha tensore riemanniano g, ho E_p, $g(p)$, E'_p, $(E'_p)^\perp$, $E_p = E'_p \oplus (E'_p)^\perp \Rightarrow$
$\Rightarrow E_p / E'_p = (E'_p)^\perp \Rightarrow E/E' = (E')^\perp$.

g prodotto scalare su $V \rightsquigarrow V \cong V^*$.

g tensore metrico su $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ M \end{array} \rightsquigarrow E_p \underset{g(p)}{\cong} E_p^* \Rightarrow E \cong E^*$.

Cor.: ogni fibrato è isomorfo al suo duale: $E \cong E^*$.

Def.: $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ M \end{array}$ con tensore metrico g. Un FRAME ORTONORMALE è $s_1, \dots, s_k \in \Gamma E$ t.c. $s_1(p), \dots, s_k(p)$ base ortonormale per E_p.

Prop.: se $\exists$ frame, allora $\exists$ frame ortonormale.
Dim.: Gram-Schmidt simultaneo. $\square$
Cor.: localmente, su un intorno trivializzante, $\exists$ frame ortonormale.

Campi vettoriali

$\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM) = \{$campi vettoriali in $M\}$. È un $C^\infty(M)$-modulo: $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M) \rightsquigarrow fX \in \mathfrak{X}(M)$. Ma ho anche $Xf \in C^\infty(M)$ dato da $(Xf)(p) = X(p)(f)$.
$\qquad$ $X(p)$ è una derivazione

M var., $s \in \Gamma \mathcal{T}_h^k(M)$; se $\{U \xrightarrow{\varphi} V\}$ carta $\Rightarrow$ φ diffeo. induce $\varphi_* s \in \mathcal{T}_h^k(V)$.

Se $X \in \mathfrak{X}(U)$, $\varphi_*(X) \in \mathfrak{X}(V)$, $\varphi_*(X)(\varphi(p)) = d\varphi_p(X(p))$.

In carte: $X \in \mathfrak{X}(V)$, $X: V \to \mathbb{R}^n$, $X(p) = \sum_{i=1}^n X^i(p) e_i \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Se ho un'altra carta (cambio di coordinate) $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}^1 \\ \vdots \\ \bar{x}^n \end{pmatrix}$,

$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \Rightarrow X = X^i \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} = \bar{X}^j \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}$,

$\bar{X}^j = X^i \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}$.

Flusso

$X \in \mathfrak{X}(M)$.

Def.: una LINEA INTEGRALE per X è $\gamma: I \to M$ curva t.c. $\forall t \in I$ $\quad X(\gamma(t)) = \gamma'(t) := d\gamma_t(1)$.

Prop.: $\forall p \in M$ $\exists!$ curva integrale $\underset{\nexists \text{ curva integrale con } I \supsetneq I_p \text{ che la estende}}{\text{massimale}}$ t.c. $\gamma_p: I_p \to M$ t.c. $\gamma_p(0) = p$.

Dim.: in carte, $X: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Voglio $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ t.c.

$\begin{cases} \gamma'(t) = X(\gamma(t)) \\ \gamma(0) = p \end{cases}$ problema di Cauchy $\Rightarrow \exists!$ $\underset{\text{dipende } C^\infty \text{ da } p}{\text{sol. locale}}$.

Per la massimalità basta unirle. $\square$

Def.: X è COMPLETO se $I_p = \mathbb{R}$ $\forall p \in M$.

Es.: $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\quad \gamma_p: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto p + te_i \end{array} \Rightarrow X$ è completo su $\mathbb{R}^n$, ma non su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

$X \in \mathfrak{X}(M)$. $U = \bigcup_{p \in M} (\underbrace{\{p\} \times I_p}_{= \{(p,v) \mid v \in I_p\}}) \subseteq M \times \mathbb{R}$.

Def.: $\Phi: U \to M$, $\Phi(p,v) = \gamma_p(v)$ è il FLUSSO.

Teo.: $U \subseteq M \times \mathbb{R}$ è aperto e Φ è liscia. Dim.: no (si rifà ad analisi 2). $\square$

Se X è completo, $U = M \times \mathbb{R}$, $\Phi: M \times \mathbb{R} \to M$. $\forall t \in \mathbb{R}$,

$\Phi_t: \begin{array}{l} M \to M \\ p \mapsto \Phi(p,t) \end{array}$ t.c. $\Phi_0 = id$, $\Phi_t \circ \Phi_{-t} = id$, $\Phi_t \circ \Phi_{t'} = \Phi_{t+t'}$.
$\qquad \Downarrow$
Φ_t è un diffeo.

Si chiama gruppo a un parametro di diffeomorfismi.

Prop. 1: M cpt $\Rightarrow$ ogni $X \in \mathfrak{X}(M)$ è completo.
Prop. 2: se $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $U \supseteq M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, allora X è completo.
Dim. (della prop. 2): ovvia. $\square$
Prop. 2 $\Rightarrow$ Prop. 1: è un ex. di topologia. Ogni $U \supseteq M \times \{0\}$ aperto contiene $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.