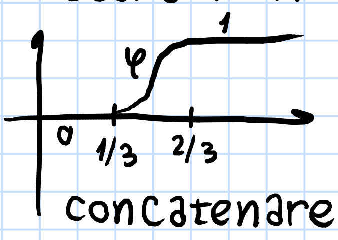
Prop. (raddrizzamento di campi): $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$. Se $X(p) \neq 0$ allora $\exists$ raddrizzamento, cioè $\varphi : U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ t.c. $\varphi_*(X_{|U}) = \frac{\partial}{\partial x^1}$.

Dim.: prendiamo una carta in cui X è campo in $\mathbb{R}^n$ e WLOG $X(0) = \frac{\partial}{\partial x^1}$. Φ flusso di X, definiamo
$$\varphi : V \to \mathbb{R}^n, \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto \Phi_{x^1}\begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$
$0 \in V$ aperto opportuno.

$\varphi_{|V \cap \{x^1 = 0\}} = id$. φ manda linee orizzontali in linee integrali.
$d\varphi_0(e_i) = e_i \ \forall i = 2, \dots, n$, $d\varphi_0(e_1) = X(0) = e_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} \Rightarrow d\varphi_0 = id \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi_0$ diffeo loc., $\varphi : V(0) \to W(0)$, $\varphi^*(X) = \frac{\partial}{\partial x^1}$. $\square$

Isotopia

Def.: una OMOTOPIA LISCIA fra $f, g : M \to N$ lisce è $F : M \times \mathbb{R} \to N$ liscia t.c. $\left(\begin{array}{l} F_t : M \to N \\ p \mapsto F(p,t) \end{array} \right)$ $F_0 = f$, $F_1 = g$.

Oss.: si può riparametrizzare F in modo che $F_t = F_0 \ \forall t \leq 1/3$, $F_t = F_1 \ \forall t \geq 2/3$: 

, $\bar{F}(p,t) = F(p, \varphi(t))$.

Questo serve a concatenare.

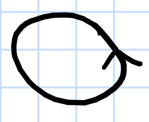
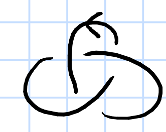
Prop.: essere lisciamente omotope è relazione di equivalenza fra funzioni lisce $f : M \to N$.

Dim.: l'unica non ovvia è la transitività: $f \overset{F}{\sim} g \overset{G}{\sim} h$, riparametrizzo e concateno. $\square$

Def.: un'ISOTOPIA fra due embedding $f, g : M \hookrightarrow N$ è un'omotopia liscia F t.c. $F_t : M \hookrightarrow N$ è embedding $\forall t \in \mathbb{R}$.

Come prima, essere isotopi è relazione di equivalenza fra embedding.

Def.: un NODO è un embedding $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (o S^3).

 e  sono isotopi?

Tutte le mappe $f : M \to \mathbb{R}^n$ sono omotope (in senso liscio): $F_t(p) = t f(p)$, $F_1 = f$, $F_0 \equiv 0$.

Def.: un'ISOTOPIA AMBIENTE è un'isotopia F fra $\overset{F_0}{\overset{\shortparallel}{id}} : M \to M$ e $\overset{F_1}{\overset{\shortparallel}{\varphi}} : M \to M$ diffeo. t.c. $F_t : M \to M$ è diffeo. $\forall t$.

Es.: se $X \in \mathfrak{X}(M)$ è completo, Φ_t è isotopia ambiente.

Oss.: se $f : M \hookrightarrow N$ embedding, F isotopia ambiente di N, allora $G_t : M \to N$, $G_t = F_t \circ f$ è isotopia fra f e $F_1 \circ f = \varphi \circ f$.

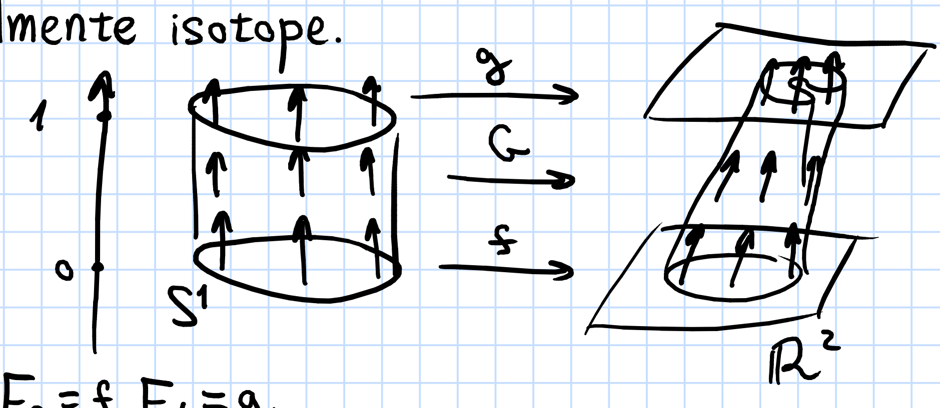
Teo.: M cpt. Ogni isotopia fra embedding $f, g : M \hookrightarrow N$ è indotta da un'isotopia ambiente di N.

Oss.: se M non è cpt, non è vero.

Prop.: $f, g : M \hookrightarrow N$ embedding ambientalmente isotopi $\Rightarrow N \setminus f(M)$ è omeomorfo a $N \setminus g(M)$.

Dim. (della prop.): $g = \varphi \circ f$, $\varphi : N \to N$ diffeo. $\Rightarrow \varphi(f(M)) = g(M) \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(N \setminus f(M)) = N \setminus g(M)$. $\square$

Es.: $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f = id$, $g(\mathbb{R}) = (0,1)$. Ex.: sono isotope ma non ambientalmente isotope.

Dim. (del teo.): 

$F : M \times \mathbb{R} \to N$, $F_0 = f$, $F_1 = g$,
$$G : M \times \mathbb{R} \to N \times \mathbb{R}, \quad (p,t) \mapsto (F(p,t), t).$$
G è embedding: è iniettiva.

Immersione: $dG_{(p,t)} = \left(\begin{array}{c|c} d(F_t)_p & * \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array} \right)$ è invertibile $\Rightarrow$ immersione.

Ex.: M cpt $\Rightarrow G$ propria ($\Rightarrow$ embedding).

$T_{(p,t)} M \times \mathbb{R} = T_p M \times \mathbb{R}$, $T_{(q,t)} N \times \mathbb{R} = T_q N \times \mathbb{R}$.

$X = \frac{\partial}{\partial t} \equiv (0,1) \in \mathfrak{X}(M \times \mathbb{R})$.

Prop.: $h : A \hookrightarrow B$ embedding, $X \in \mathfrak{X}(A) \rightsquigarrow h_*(X)$ campo vettoriale parziale in B definito solo su $h(A) \subseteq B$.

Dim.: $h_*(X)(h(p)) := dh_p(X(p))$. È ben def., liscio perché h embedding (ex.). $\square$

Consideriamo $Y = G_*(X)$ campo su $B = G(M \times [0,1])$ cpt.

Estensione di campi: Y si estende a un campo su $N \times \mathbb{R}$ che è nullo fuori da $U \supseteq B$ aperto con $\bar{U}$ cpt. Modifico ancora Y imponendo che la componente verticale sia 1 ($Y(q,t) = (\underset{T_q N}{\underset{\cap}{Y_1(q,t)}}, \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{Y_2(q,t)}})$, $\bar{Y}(q,t) = (Y_1(q,t), 1)$).

Fuori da $\bar{U}$, $Y = \frac{\partial}{\partial t}$.

Oss.: Y è completo: $\bar{U}$ cpt $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ t.c. $I_p \supseteq (-\varepsilon, \varepsilon) \ \forall p \in \bar{U}$ e fuori da $\bar{U}$ è pure più facile $\Rightarrow I_p \supseteq (-\varepsilon, \varepsilon) \ \forall p \in N \times \mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow Y$ completo.

Prendiamone il flusso $\Phi : N \times \overset{t}{\mathbb{R}} \times \overset{u}{\mathbb{R}} \to N \times \overset{t}{\mathbb{R}}$,
$$\Phi_u : N \times \overset{t}{\mathbb{R}} \to N \times \overset{t}{\mathbb{R}}, \quad (p,t) \mapsto (\Psi_u(p,t), t+u).$$
$$H_u : N \to N, \quad p \mapsto \Psi_u(p,0)$$
è l'isotopia ambiente cercata. Devo mostrare che $g = H_1 \circ f$ ($H_0 = id$).

Questo è vero perché la linea integrale verticale da $(p,0)$ a $(p,1)$ viene mandata nella linea integrale da $(f(p),0)$ a $(g(p),1)$: $\left(\frac{dF}{du}(p,u), 1 \right) = \frac{dG}{du}(p,u) =$
$= dG_{(p,u)}\left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = Y(G(p,u)) = \frac{d\Phi_u}{du}(G(p,0)) =$
$= \frac{d\Phi_u}{du}(F(p,0), 0) = \frac{d\Phi_u}{du}(f(p), 0) = \frac{d}{du}(\Psi_u(f(p),0), u) \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{dF_u}{du}(p) = \frac{dF}{du}(p,u) = \frac{d\Psi_u}{du}(f(p),0) = \frac{dH_u}{du}(f(p))$, $H_0 \circ f = f = F_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow H_u(f(p)) = F_u(p) \ \forall u \in [0,1]$. $\square$