Parentesi di Lie (Lie brackets)

Def.: $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$ definito nel modo seguente:
$\forall p \in M\ \forall f \in C^\infty(U(p))\ [X,Y](p)(f) := X(p)(Yf) - Y(p)(Xf)$.

Prop.: è una derivazione.

Dim.: località e linearità ok. Leibniz: (omettiamo la dipendenza da p)
$X(Y(fg)) = X((Yf)\cdot g) + X(f\cdot(Yg)) =$
$= X(Yf)\cdot g + (Yf)(Xg) + (Xf)(Yg) + fX(Yg)$,
$Y(X(fg)) = Y(Xf)\cdot g + (Xf)(Yg) + (Yf)(Xg) + fY(Xg) \Rightarrow$
$\Rightarrow [X,Y](fg) = ([X,Y]f)g + f([X,Y]g)$. □

Prop.: se $\varphi: M \xrightarrow{\sim} N$ diffeo., allora $\varphi_*[X,Y] = [\varphi_* X, \varphi_* Y]$.

Oss.: $[\ ,\ ]$ è locale: dipende da X, Y in $U(p)$.

Ex.: $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $[X,Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \in C^\infty(V)$,
cioè $[X,Y] = X^j \frac{\partial Y}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(V)$.

Cor.: $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, Y\right] = \frac{\partial Y}{\partial x^i}$. **Cor.:** $[X,Y] = 0$ se X, Y cost. su $\mathbb{R}^n$.

Proprietà: $[\ ,\ ]$ è bilineare.
Oss.: se $f \in C^\infty(M)$, $[fX, Y] \neq f[X,Y]$ in generale (locale ma non puntuale).
$[X,Y] = -[Y,X]$. Ⓐ
Ex.: identità di Jacobi, $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$. Ⓑ

Algebra di Lie := algebra che soddisfa Ⓐ e Ⓑ.

Def.: $f: M \to N$ liscia, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ sono f-RELATED se
$df_p(X(p)) = Y(f(p))\ \forall p \in M$.

Ex.: X, Y f-related, X', Y' f-related $\Rightarrow [X,X'], [Y,Y']$ f-related.

Cor.: $N \subseteq M$ chiusa (o t.c. ∃ estensioni), $X, X' \in \mathfrak{X}(N) \rightsquigarrow [X,X'] \in \mathfrak{X}(N)$.
estendo: $\bar{X}, \bar{X}' \in \mathfrak{X}(M) \rightsquigarrow [\bar{X}, \bar{X}'] \in \mathfrak{X}(M)$ (estendo)

Dim.: considero $f: N \hookrightarrow M$ inclusione. □

$X, Y \in \mathfrak{X}(M) \rightsquigarrow \Phi, \Psi$ flussi.

Lemma: sia $M = \mathbb{R}^n$, allora $\Psi_t(\Phi_s(p)) - \Phi_s(\Psi_t(p)) = st[X,Y](p) + o(s^2+t^2)$
$\forall p \in \mathbb{R}^n$.

Dim.: $F(s,t) = \Psi_t(\Phi_s(p)) - \Phi_s(\Psi_t(p))$, $F: \underset{U(0)}{\overset{\mathbb{R}^2}{\cup}} \to \mathbb{R}^n$.
$F_{|s=0} \equiv 0$, $F_{|t=0} \equiv 0 \Rightarrow F(s,t) = \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}\Big|_{s=t=0} st + o(s^2+t^2)$.
$\frac{\partial}{\partial t}(\Psi_t(\Phi_s(p)))_{|t=0} = Y(\Phi_s(p))$.
$\frac{\partial}{\partial s}(Y(\Phi_s(p)))_{|s=0} = X^i \frac{\partial Y}{\partial x^i}$. Segue la tesi. □

Def.: $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ COMMUTANO se $[X,Y] \equiv 0$.

Es.: campi costanti in $\mathbb{R}^n$.

Prop.: $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ commutano $\Longleftrightarrow$ i loro flussi commutano localmente,
cioè $\forall p \in M\ \exists \varepsilon > 0$ t.c. $\Psi_t \circ \Phi_s(p) = \Phi_s \circ \Psi_t(p)\ \forall t, s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
Ex.: se X, Y completi, si può togliere «localmente».

Dim. (della prop.): ($\Leftarrow$) dal lemma.
($\Rightarrow$) Se $X(p) = Y(p) = 0$, $\Psi_t(\Phi_s(p)) = p = \Phi_s(\Psi_t(p))$.
Se $X(p) \neq 0$, per raddrizzamento ∃ carta t.c. $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$, $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$.
$[X,Y] \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^1} Y^i = 0\ \forall i$. Si conclude guardando il disegno. □

Prop. (raddrizzamento simultaneo di campi):
$X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ che commutano, $p \in M$. Se
$X_1(p), \dots, X_k(p)$ sono indipendenti, allora $\exists\ \varphi: U(p) \to \mathbb{R}^n$ carta
che manda X_i in $\frac{\partial}{\partial x^i}\ \forall i = 1, \dots, k$.

Dim.: scelgo una carta in cui $p = 0$ e $X_i(0) = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Φ^i flusso di X_i
(definito per t piccolo). Definisco
$F(x^1, \dots, x^n) = \Phi^k_{x^k} \circ \dots \circ \Phi^1_{x^1}(0, \dots, 0, x^{k+1}, \dots, x^n)$.
1) $dF_0 = id \Rightarrow F$ è diffeo. loc. $\Rightarrow$ è loc. carta;
2) F manda $\frac{\partial}{\partial x^i}$ in X^i $\forall i = 1, \dots, k$ (perché i flussi commutano). □

Derivata di Lie

M varietà, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $s \in \Gamma \mathcal{T}^k_h(M)$ ($s(p) \in \mathcal{T}^k_h(T_pM)$).

Def.: $\mathcal{L}_X(s) \in \Gamma \mathcal{T}^k_h(M)$: Φ_t flusso di X, $d(\Phi_t)_p: T_pM \xrightarrow{\sim} T_{\Phi_t(p)}M$
induce $d(\Phi_t)_p: \mathcal{T}^k_h(T_pM) \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}^k_h(T_{\Phi_t(p)}M)$, $\gamma(t) = \Phi_t(p)$,
$\mathcal{L}_X(s)(p) = \frac{d}{dt}\left(d(\Phi_t)_p^{-1}(s(\gamma(t)))\right)_{t=0}$.

Ex.: $\mathcal{L}_X(f) = Xf$ se $f \in C^\infty(M)$.
$Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\mathcal{L}_X(Y) = [X,Y]$.
$\mathcal{L}_X(s \otimes s') = (\mathcal{L}_X s) \otimes s' + s \otimes (\mathcal{L}_X s')$.
$\mathcal{L}_X$ commuta con le contrazioni: $\mathcal{L}_X(C(s)) = C(\mathcal{L}_X(s))$.

$\mathcal{L}_X s$ dipende loc. ma non puntualmente da $X(p)$.