G gruppo di Lie, $\mathfrak{g} = T_e G \longleftrightarrow \{$campi invarianti a sx$\}$.

$X \in \mathfrak{X}(M)$ è invariante a sx se $\forall g \in G$ è L_g-invariante, cioè $\forall g' \in G \quad X(L_g(g')) = d(L_g)_{g'}(X(g'))$.

Dato $v \in \mathfrak{g} \rightsquigarrow X$ inv. a sx, $X(g) = d(L_g)_e(v)$; è inv. a sx (segue da $L_g = L_{gg'} \circ L_{g'^{-1}}$):

$$X(L_g(g')) = X(gg') = d(L_{gg'})_e(v) = d(L_g)_{g'}(d(L_{g'})_e(v)) = \\ = d(L_g)_{g'}(X(g')).$$

Prop.: $\{$campi inv. a sx$\} \subseteq \mathfrak{X}(G)$ è una sottoalgebra.

Dim.: X, Y inv. a sx $\overset{?}{\Longrightarrow} [X,Y]$ inv. a sx.

$\Updownarrow$

$(L_g)_*(X) = X,\ (L_g)_*(Y) = Y\ \forall g \in G \Rightarrow$
$\Rightarrow (L_g)_*([X,Y]) = [X,Y]\ \forall g \in G.$ $\square$

Def.: un'algebra di Lie è ABELIANA se $[X,Y]=0\ \forall X, Y$.
(Teo.: G abel. $\Rightarrow \mathfrak{g}$ abel.)

Es.: V s.v. $\Rightarrow$ è gruppo di Lie. $V = \mathbb{R}^n$, $T_e\mathbb{R}^n$, $v \mapsto$ campo costante v, $[\text{cost.}, \text{cost.}] = 0$.

$A, B \in M(n)$, $X(x) = Ax \quad Y(x) = Bx$. Ex.: $[X,Y](x) = (BA - AB)(x)$.

$G = GL(n,\mathbb{R})$. $T_I GL(n,\mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = M(n)$ è un'algebra di Lie.

Ex.: il bracket è $[A,B] = AB - BA$.

Hint: $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, $X(M) = d(L_M)_I(A) = MA$.

Def.: un OMOMORFISMO fra gruppi di Lie è $f: G \to H$ omomorfismo di gruppi liscio.

Prop.: $f: G \to H$, $df_e: T_e G \to T_e H$ è omomorfismo di algebre di Lie.
$f_*: \quad \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$

Dim.: $v, w \in T_e G$. $[v,w] = [X,Y](e)$. $\quad f_*(v), f_*(w)$.
$v \rightsquigarrow X$, $w \rightsquigarrow Y$; $f_*(v) \rightsquigarrow X'$, $f_*(w) \rightsquigarrow Y'$

X e X' sono f-correlati: infatti,
$X'(f(g)) = d(L_{f(g)})_e(df_e(v))$, $df_g(X(g)) = df_g(d(L_g)_e(v))$, $L_{f(g)} \circ f = f \circ L_g$.

Anche Y e Y' sono correlati $\Rightarrow [X,Y]$ e $[X',Y']$ correlati $\Rightarrow$
$\Rightarrow f_*([v,w]) = [f_*(v), f_*(w)]$. $\square$

Def.: 1) G gruppo di Lie, $H < G$ è sottogruppo di Lie se è sottovarietà e sottogruppo;

2) sia $f: H \to G$ morfismo di gruppi di Lie e immersione ini.; $f(H)$ è sottogruppo di Lie.

1) e 2) non sono equivalenti.