Es.: $G=S^1\times S^1$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\xrightarrow{F}\mathbb{R}\times\mathbb{R}\xrightarrow{\pi}S^1\times S^1$.
$t\longmapsto(t,\lambda t)$ $\quad S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Se $\lambda\notin\mathbb{Q}$, $f=\pi\circ F$ è ini.. (f è sempre immersione)

Se $\lambda\in\mathbb{Q}$, f non è ini.. $\lambda=q/p$ coprimi,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S^1\times S^1 \\ \mathbb{R}/p\mathbb{Z} \arrow[ur, "\bar f"'] & \end{tikzcd}$$

$\bar f$ è immersione ini. da un cpt $\Rightarrow$ embedding.

Foliazioni

Def. 1: M^n var., $0<k<n$. Una k-FOLIAZIONE è una partizione di M in "sottovarietà" (di dim. k) iniettivamente immerse (immagini di immersioni ini.) connesse dette FOGLIE t.c. $\forall p\in M\ \exists\ \varphi:U(p)\longrightarrow\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-k}$ t.c. $\forall$ foglia λ $\varphi(U\cap\lambda)\overset{*}{=}\mathbb{R}^k\times J$ con $J\subseteq\mathbb{R}^{n-k}$ sottoinsieme.

Oss.: J è al più numerabile.

Es.: $\begin{array}{c}E\\\downarrow\\B\end{array}$ fibrato, $\{E_p\}_{p\in B}$ è foliazione (con foglie embeddate).

Def. 2: una k-foliazione su $M^{n=k+h}$ è un atlante $\mathcal{A}=\{\varphi_i:U_i\to\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^h\}$ t.c. φ_{ij} sono loc. del tipo $\varphi_{ij}(x,y)=\left(\varphi^1_{ij}(x,y),\varphi^2_{ij}(y)\right)$.

Def. 1 $\rightsquigarrow$ Def. 2: prendiamo $\mathcal{A}=\{\text{carte del tipo } *\}$.

Def. 2 $\rightsquigarrow$ Def. 1: con le preimmagini delle carte, verificando il necessario.

Distribuzioni

Def.: M^n var., $0<k<n$. Una k-DISTRIBUZIONE è un k-sottofibrato $D\subseteq TM$ ($D_p\subseteq T_pM$ k-sottospazio).

Es.: $\mathcal{F}$ foliazione $\rightsquigarrow$ D distribuzione, $D_p:=$ sottospazio tangente alla foglia passante per p.

Def.: D distribuzione su M è INTEGRABILE se la otteniamo da una foliazione $\mathcal{F}$ su M.
D è INVOLUTIVA se $\forall X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ tangenti a D (cioè $X(p)\in D_p\ \forall p\in M$) anche $[X,Y]$ è tangente.

Teo. (Frobenius): D integrabile $\Longleftrightarrow$ è involutiva.

Prop.: D è integrabile $\Leftrightarrow$ è loc. cost., cioè $\forall p\in M\ \exists\varphi:U(p)\overset{*}{\to}\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^h$ che porta $D|_U$ nella distribuzione cost., cioè $d\varphi_q(D_q)=\mathbb{R}^k\times\{0\}$ $\forall q\in U(p)$.

Dim. (della prop.): ($\Rightarrow$) D integrabile $\Rightarrow$ viene da $\mathcal{F}$ $\Rightarrow$ è loc. cost..
($\Leftarrow$) $\mathcal{A}=\{*\}$ soddisfa la def. 2 di foliazione. $\square$

Prop.: sia $X_1,\dots,X_k$ frame per D. D è involutiva $\Longleftrightarrow[X_i,X_j]$ è tangente a D $\forall i,j$.

Dim. (della prop.): ($\Rightarrow$) ovvia.
($\Leftarrow$) X,Y tangenti a D, $X=\sum_{i=1}^k f_iX_i$, $f_i\in C^\infty(M)$,
$$Y=\sum_{j=1}^k g_jX_j\Rightarrow[X,Y]=\sum_{i,j}[f_iX_i,g_jX_j]\underset{\substack{\uparrow\\ \text{vedi ex.}\\5.3}}{=}\underbrace{\sum_{i,j}\left(f_ig_j[X_i,X_j]+f(X_ig_j)X_j-g_j(X_jf_i)X_i\right)}_{\in\,\mathrm{Span}\{X_i,X_j,[X_i,X_j]\}}.\ \square$$

Dim. (del teo.): ($\Rightarrow$) D integrabile $\Rightarrow$ loc. cost..
X,Y tangenti a D, voglio $[X,Y]$ tangente a D, è una richiesta locale; scelgo una carta in cui D è loc. cost.,
$M=\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^h$, $D(p)=\mathbb{R}^k\times\{0\}$, $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y=Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$,
$X^i=Y^j=0\ \forall i,j>0\Rightarrow[X,Y]^i=X^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}-Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}=0\ \forall i>k$.

($\Leftarrow$) $\forall p\in M$, $\varphi:U(p)\to\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^h$ t.c. $d\varphi_p(D_p)=\mathbb{R}^k\times\{0\}$. Sia $W(0)$ t.c. $\forall q\in W$ $D_q\cap(\{0\}\times\mathbb{R}^h)=\{0\}$.
Ho un frame per D: $X_1,\dots,X_k$, $X_i=\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{j=k+1}^n X_i^j\frac{\partial}{\partial x^j}$.
D involutiva $\Rightarrow[X_i,X_j]$ tangente a D.
$[X_i,X_j]^l=0\ \forall l\leq k\Rightarrow[X_i,X_j]\equiv0$ su W. Per raddrizzamento, $\exists$ carta che manda X_i in $\frac{\partial}{\partial x^i}\Rightarrow$ manda D in una distribuzione costante. $\square$

Es.: in $\mathbb{R}^3$, $X=\frac{\partial}{\partial x}$, $Y=\frac{\partial}{\partial y}+x\frac{\partial}{\partial z}$, $D_p=\mathrm{span}\{X(p),Y(p)\}$,
$[X,Y]=X^i\frac{\partial Y}{\partial x^i}-Y^i\frac{\partial X}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial z}$ non tangente a D.

Ex.: una 1-distribuzione è sempre integrabile.