Oss.: se $H<G$ sottogruppo di Lie, $\mathcal{H}=T_eH\subseteq T_eG=\mathfrak{g}$ è sottoalgebra, perché $H=\mathcal{I}m(f:\overline{H}\to G)$, f immersione ini. $\Rightarrow f_*:\overline{\mathcal{H}}\hookrightarrow\mathfrak{g}$ morfismo di algebre, $\overline{\mathcal{H}}=\mathcal{H}$.

Teo.: G gruppo di Lie. Se $\mathcal{H}\subseteq\mathfrak{g}$ sottoalgebra, $\exists!$ sottogruppo di Lie $H<G$ connesso t.c. $T_eH=\mathcal{H}$.

Oss.: se H é sottogruppo sconnesso, allora H^0 c.c. che contiene e è sottogruppo normale. Es.: $GL(n,\mathbb{R})$, $SO(n)=O(n)^0$.

Dim. (dell'oss.): $g\in H^0$, $L_g:\underset{e\mapsto g}{H\to H}$ permuta le c.c. $\Rightarrow$ preserva $H^0\Rightarrow H^0$ chiuso per moltiplicazione. $\underset{\substack{g\mapsto g^{-1}\\ e\mapsto e}}{H\to H}$ preserva H^0. $\square$

Dim. (del teo.): $\mathcal{H}\subseteq\mathfrak{g}=T_eG$, $\mathcal{D}$ distribuzione in G, $\mathcal{D}(g)=d(L_g)_e(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}=\mathcal{D}(e)$.

- $\mathcal{D}$ è involutiva: $v_1,\dots,v_k$ base di $\mathcal{H}$,

$$\begin{matrix} v_1,\dots,v_k \\ \downarrow \quad\ \ \downarrow \\ X_1,\dots,X_k \end{matrix}$$

campi invarianti a sx, frame per $\mathcal{D}$.

Basta mostrare che $[X_i,X_j]$ è tangente a $\mathcal{D}$ $\forall i,j$.

$\mathcal{H}$ sottoalgebra $\Rightarrow\mathcal{H}\ni[v_i,v_j]=[X_i,X_j](e)\Rightarrow$
$\Rightarrow[X_i,X_j](g)\in\mathcal{D}(g)$.

- Frobenius: $\exists\,\mathcal{F}$ foliazione di G che induce $\mathcal{D}$.
- $H:=$ la foglia di $\mathcal{F}$ che contiene e (è connessa).

$\mathcal{D}$ è L_g-invariante $\forall g\in G\underset{\substack{\mathcal{F}\text{ univocamente}\\ \text{determinata da }\mathcal{D}}}{\Rightarrow}\mathcal{F}$ è L_g-invariante $\forall g\in G\Rightarrow$

$\Rightarrow L_g$ permuta le foglie di $\mathcal{F}$. Come prima, $H<G$.

Qualsiasi sottogruppo connesso tangente a $\mathcal{H}$ è costruito così: $\mathcal{D}(g)=dL_g(\mathcal{H})$ è tangente a H.

Ex.: $\mathcal{D}$ distribuzione involutiva su $M\rightsquigarrow\mathcal{F}$. Se $N\subseteq M$ è una k-sottovarietà immersa connessa tangente a $\mathcal{D}$ $(T_pN=\mathcal{D}(p))\Rightarrow$
$\Rightarrow N$ contenuta in una foglia.

Segue l'unicità. $\square$

Oss.: $G^0\lhd G$. $C_g(h)=g^{-1}hg=R_gL_{g^{-1}}h$ è omeo. $\Rightarrow$ permuta le c.c. di G, $C_g(e)=e\Rightarrow C_g(G^0)=G^0$.

Ex.: nel setting del teo., $H\lhd G\Leftrightarrow\mathcal{H}$ ideale in $\mathfrak{g}$.

G gruppo di Lie, $v\in\mathfrak{g}=T_eG$, $\mathcal{H}=\{tv\mid t\in\mathbb{R}\}$ è sottoalgebra ($[v,v]=0$).

Prop.: un campo X invariante a sx è sempre completo.

Dim.: γ_g curva integrale, $\gamma_g(0)=g\in G$, $\gamma_g:I_g\to G$, $\gamma_g'(t)=X(\gamma_g(t))$. $\gamma_g(t)=g\cdot\gamma_e(t)\Rightarrow I_g=I_e\Rightarrow$ è $\mathbb{R}$. $\square$

Def.: MAPPA ESPONENZIALE $exp:\mathfrak{g}\to G$. $v\in\mathfrak{g}$, $v\rightsquigarrow X$ completo, $exp(v)=\gamma_e^v(1)$.

Ex.: $G=GL(n,\mathbb{R})$, $\mathfrak{g}=T_IG=M(n)$, $[A,B]=AB-BA\Rightarrow$
$\Rightarrow exp(A)=e^A=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{A^i}{i!}$.

Prop. (omogeneità): $\underset{t\mapsto exp(tv)}{\mathbb{R}\to G}$ è un morfismo di gruppi di Lie $\forall v\in\mathfrak{g}$ (sottogruppo a un parametro).

Dim.: $exp(tv)=\gamma_e^{tv}(1)=\gamma_e^v(t)=\Phi^v(e,t)=\Phi_t^v(e)$. Si usa che $\Phi_{t+v}=\Phi_t\circ\Phi_v$. Si ottiene $H^v=exp(\mathbb{R}v)$. $\square$

Ex.: $f:G\to H$ morfismo di gruppi di Lie è immersione $\Leftrightarrow f_*$ ini..

Oss.: $d\,exp_0:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ è l'identità $\Rightarrow$ è diffeo. loc. in 0.

Intorno tubolare

M^m var., $N^n\subseteq M$ sottovar..

Def.: un INTORNO TUBOLARE per N è un fibrato $\begin{matrix}E^m\\ \downarrow\\ N\end{matrix}$ di rango $k=m-n$ e un embedding $i:E\hookrightarrow M$ t.c. $i_{|N}=id_N$ e $i(E)$ è un intorno di N. (s_0, $N=s_0(N)\subseteq E$)

In altre parole, un intorno aperto $i(E)$ che ha struttura di fibrato con N 0-sezione.

Teo.: $\exists$ sempre intorno tubolare con $E=\nu N$.

Dim.: 1) caso $M=\mathbb{R}^m\supseteq N$. $\nu N=\{(p,v)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\mid p\in N, v\in T_pN^\perp\}$.

$\underset{(p,v)\mapsto p+v}{\nu N\xrightarrow{f}\mathbb{R}^m}$, $df_{(p,0)}:T_{(p,0)}\nu N\to\mathbb{R}^m$;

$df_{(p,0)}:T_pN\times T_pN^\perp\xrightarrow{id}\mathbb{R}^m$.
$(w,v)\longmapsto w+v$

f è diffeo. loc. su $(p,0)$ $\forall p\in M$.

Ex. noioso: $\exists N\subseteq U\subseteq\nu N$ aperto t.c. $f_{|U}$ embedding.

Lemma (di strizzamento): $\begin{matrix}E\\ \downarrow\\ N\end{matrix}$ fibrato, $N\subseteq U\subseteq E$ aperto.
$\exists$ embedding $F:E\hookrightarrow U$ t.c. (i) $F_{|N}=id$, (ii) $F(E_p)\subseteq E_p$.
$\exists$ isotopia F_t tra F e id t.c. $\forall t$ valgono (i) e (ii).

Dim.: localmente il fibrato è come $\underset{\substack{\downarrow\\ \text{disco in }\mathbb{R}^h}}{D}\times\mathbb{R}^k\to D$. $D\times\{0\}$ cpt $\Rightarrow$
$\Rightarrow\exists\,\varepsilon>0$ t.c. $U\supseteq D\times B(0,\varepsilon)$, (quello della metrica)
ho $f:\underset{0\longmapsto 0}{\mathbb{R}^k\to B(0,\varepsilon)}$ diffeo..

Mettiamo una metrica riemanniana g su E.

Ex.: incollare le f con le partizioni dell'unità. $\square$

Per il lemma ho $f:E\hookrightarrow U$ embedding t.c. $f_{|N}=id$.

Avevamo
$$\begin{tikzcd} \nu N \\ U \arrow[u, hook, bend left, "emb."] \arrow[r, hook, "emb."] & \mathbb{R}^m \\ N \arrow[ur, hook] \end{tikzcd}$$
($U\subseteq\nu N$, $N\subseteq U$)

2) Caso generale: $N^n\subseteq M^m\overset{\text{Whitney}}{\subseteq}\mathbb{R}^N$.

$\nu N=\{(p,v)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\mid p\in N, v\in T_pN^\perp\}$. (ortogonale in T_pM)

$\underset{(p,v)\mapsto p+v}{F:\nu N\to\mathbb{R}^N}$. Usiamo l'intorno tubolare νM di M in $\mathbb{R}^N$.

$\begin{matrix}\nu M\\ \downarrow\pi\\ M\end{matrix}$, $W=F^{-1}(\nu M)$, $\underset{(p,v)\mapsto\pi(p+v)}{f.:W\to\mathbb{R}^N}$. $\square$