Lemma di strizzamento (dettagli mancanti):

Fatto: $\exists\, r: M \to (0,+\infty)$ t.c. $\forall p$ $\underset{E_p}{\underset{\cap}{B(0_p, r(p))}} \subseteq U$

(ex., usare partizioni dell'unità).

$f: V \to B^n \subseteq V$ diffeo. (radiale), $F(v) = r(\underbrace{\pi(v)}_{= p}) \cdot f(v) \subseteq U$ $\forall p$.

$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+\|x\|^2}}$

Ex.: F embedding (l'inversa di f si scrive).

Prendendo $f_t(x) = \frac{x}{\sqrt{1+\|x\|^2}} t + x(1-t)$, si ottiene F_t isotopia tra id e F.

Prop.: $f: M \to N$ continua fra varietà lisce, $S \subseteq M$ chiuso t.c. $f_{|S}$ liscia.

$\exists\, F: M \to N$ liscia omotopa a f t.c. $F_{|S} = f_{|S}$.

Dim.: $f: M \to N \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \subseteq \nu N \subseteq \mathbb{R}^N$ intorno tubolare. ($\pi: \nu N \to N$)

Ex.: $\exists\, r: N \to (0,+\infty)$ t.c. $B(p, r(p)) \subseteq \nu N$ $\forall p \in N$.

Versione già vista: $\varepsilon: M \to (0,+\infty)$, $\varepsilon(p) = r(f(p))$, $f: M \to \mathbb{R}^N \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ \bar{f}: M \to \mathbb{R}^N$ liscia t.c. $\|\bar{f}(p) - f(p)\| < \varepsilon(p)$ $\forall p \in M$, $\bar{f}_{|S} = f_{|S}$.

$F(p) = \pi(\bar{f}(p))$.

Omotopia: $F_t(p) = \pi(t\bar{f}(p) + (1-t)f(p))$. $\square$

Cor.: $f, g: M \to N$ lisce omotope in senso continuo $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ omotope in senso liscio.

Dim.: $F: M \times \mathbb{R} \to N$ continua. $S = M \times \{0,1\} \Rightarrow F_{|S} = f \sqcup g$ liscia.

Allora $\exists\, \bar{F}: M \times \mathbb{R} \to N$ liscia t.c. $\bar{F}_{|S} = F_{|S}$, l'omotopia cercata. $\square$

Gruppi di omotopia superiori: X s.t. cpa, $k \geq 1$, $p \in X$,

$\pi_k(X, p) = \{f: S^k \to X \text{ cont.} \mid f(\text{polo Nord}) = p\}/\underset{\text{omotopia}}{\sim}$

è un gruppo.

$k \geq 2$: 1) π_k è abeliano;

2) $\hat{X} \xrightarrow{f} X$ rivestimento, $f_*: \pi_k(\hat{X}, p) \to \pi_k(X, f(p))$ è isomorfismo.

$\pi_k(S^n) = ?$ Se $k < n$ è banale ($\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$):

$f: S^k \to S^n$, poli Nord come pto base. $f \sim F$ liscia, $[f] = [F]$. Sard $\Rightarrow F$ non è surj., $F: S^k \to S^n \setminus \{\infty\} \cong \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ è omotopa alla costante.