Varietà con bordo

Def.: una m-VARIETÀ TOPOLOGICA CON BORDO è X s.t. Hausdorff e a base numerabile t.c. $\forall x \in U(x) \xrightarrow[\text{omeo.}]{\sim} V \subseteq \mathbb{R}^m_+ = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\}$.

Un ATLANTE LISCIO è $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \to V_i\}$ con φ_{ij} lisce.

Ex.: M var. con bordo, $\forall p \in M$ se una carta manda p in $\partial\mathbb{R}^m_+ = \{x_m = 0\}$, allora tutte le carte lo fanno.

$\partial M := \{p \in M \mid \underset{\Downarrow}{\exists}\, \varphi \text{ carta t.c. } \varphi(p) \in \partial\mathbb{R}^m_+\}$. $int(M) = M \setminus \partial M$.

∂M è in modo $\forall$ naturale una $(m-1)$-var. senza bordo. L'atlante per ∂M si ottiene restringendo l'atlante massimale di M e identificando $\partial\mathbb{R}^m_+ = \mathbb{R}^{m-1}$.

Def.: M senza bordo, un DOMINIO in M è $D \subseteq M$ t.c. $\forall p \in D\, \exists \varphi : \underset{\text{in } M}{U(p)} \xrightarrow{\sim} \underset{\text{aperto}}{V} \subseteq \mathbb{R}^m$ t.c. $\varphi(U \cap D) = V \cap \mathbb{R}^m_+$.

Restringendo queste carte a D, si ottiene un atlante per D.

Es.: se $\partial M = \emptyset$, $f : M \to \mathbb{R}$ liscia, $a \in \mathbb{R}$ valore regolare, $f^{-1}((-\infty, a]) = D$ è un dominio. $p \in D$: 1) $f(p) < a \Rightarrow \exists\, U(p) \subseteq D$;
2) se $f(p) = a$, f è sommersione in p e si usa la forma normale.

Cose che si estendono senza sforzi:

- T_pM (usando le derivazioni); $\forall p \in M$, $T_p\partial M \subseteq T_pM$;
- TM; $\mathcal{T}^k_h M$;
  $\downarrow \quad \downarrow$
  $M \quad M$
- $f : M \to N$ liscia;
- $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$;
- immersione/embedding.

Sottovarietà? Def.: è l'immagine di un embedding.

k-forme

M var. con bordo.

Def.: una k-FORMA ω su M è una sezione di $\Lambda^k(TM)$, cioè $\forall p \in M$ $\omega(p) \in \Lambda^k(T_pM)$, cioè $\omega(p) : \underbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}_{k} \to \mathbb{R}$ antisimmetrico.

$\Omega^k(M) = \Gamma\Lambda^k(TM)$.

$f \in C^\infty(M) \rightsquigarrow f \cdot \omega \in \Omega^k(M)$.

$\Omega^*(M) = \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k(M)$.

Una k-forma in coordinate: $\omega \in \Omega^k(M)$, $U \xrightarrow[\omega \rightsquigarrow \omega]{\sim\ (\text{carta})} V \subseteq \mathbb{R}^m$.

$\underset{e_1}{\frac{\partial}{\partial x^1}}, \ldots, \underset{e_m}{\frac{\partial}{\partial x^m}}$ base canonica di $\mathbb{R}^m$, $dx^1, \ldots, dx^m$ base duale di $(\mathbb{R}^m)^*$ (dx^i è il differenziale di $x^i(x) = x^i$).

Una base di $\Lambda^k(\mathbb{R}^m)$ è $\{dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\}_{i_1 < \ldots < i_k}$.

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \underbrace{f_{i_1, \ldots, i_k}}_{C^\infty} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = \sum_{I \hookrightarrow \text{multi-indice}} f_I\, dx^I.$$

Cambiando carta, $x \rightsquigarrow \bar{x}$, $d\bar{x}^1, \ldots, d\bar{x}^m$, $d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} dx^j$.

Casi particolari: una 0-forma è una funzione, $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$;
una m-forma è $\omega = f(x)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$, ma f dipende dalla carta.

Prodotto wedge

M, $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^h(M)$, $\omega \wedge \eta \in \Omega^{k+h}(M)$,
$(\omega \wedge \eta)(p) = \omega(p) \wedge \eta(p)$; esteso linearmente otteniamo una struttura di algebra su $\Omega^*(M)$.

Oss.: $\Omega^k(M) = \{0\}\ \forall k > m$.

Proprietà: $\omega \wedge \eta = (-1)^{kh} \eta \wedge \omega$; in particolare, $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, $dx^i \wedge dx^i = 0$.

$$\omega = f(x)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m = f(\bar{x})\left(\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^{j_1}} d\bar{x}^{j_1}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^{j_m}} d\bar{x}^{j_m}\right) =$$
$$= f(\bar{x}) \sum_{\sigma \in S_m} \left(\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^{\sigma(1)}} d\bar{x}^{\sigma(1)}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^{\sigma(m)}} d\bar{x}^{\sigma(m)}\right) =$$
$$= f(\bar{x}) \underbrace{\sum_{\sigma \in S_m} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^{\sigma(1)}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^{\sigma(m)}} \cdot sgn(\sigma)}_{\det \frac{\partial x}{\partial \bar{x}}} \cdot (d\bar{x}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{x}^m).$$

Integrazione

M orientata. $\omega \in \Omega^m_c(M)$ ($\hookrightarrow$ supporto cpt), $\int_M \omega = ?$

Caso semplice: $supp\, \omega \subseteq U \xrightarrow[\omega \rightsquigarrow \bar{\omega}]{\sim} \mathbb{R}^m_+$ carta (dell'atlante ori.), $\bar{\omega} \in \Omega^m_c(\mathbb{R}^m_+)$,
$\bar{\omega}(x) = f(x)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m$, $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^m_+)$. $\int_M \omega := \int_{\mathbb{R}^m_+} f$.

Se $supp\, \omega \subseteq U' \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m_+$ (sempre nell'atlante ori.), ho $\int_M \omega = \int_{\mathbb{R}^m_+} f$, uguale a prima per cambio di variabile (analisi 2).

Caso generale: $\omega \in \Omega^k_c(M) \rightsquigarrow \omega = \omega_1 + \ldots + \omega_h$.

Fissiamo $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^m_+\}$ atlante ori., $\{\rho_i\}$ partizione dell'unità,
$\omega = \sum_i \rho_i \omega$ (vera localmente), $\omega_i := \rho_i \omega \in \Omega^k_c(M)$, $supp\, \omega_i \subseteq U_i$. $supp\, \omega$ cpt $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ solo un numero finito di ω_i sono non nulle.

Def.: $\int_M \omega := \int_M \omega_1 + \ldots + \int_M \omega_h$.

Non dipende dalla partizione dell'unità scelta: sia $\{\rho'_j\}$ un'altra,

$$\sum_i \int_M \rho_i \omega = \sum_i \int_M \left(\sum_j \rho'_j\right) \rho_i \omega = \sum_{i,j} \int_M \rho'_j \rho_i \omega =$$
$$= \sum_j \int_M \left(\sum_i \rho_i\right) \rho'_j \omega = \sum_j \int_M \rho'_j \omega.$$

Proprietà: $\int_M : \Omega^m(M) \to \mathbb{R}$ è lineare;

$\int_{\bar{M}} \omega = -\int_M \omega$ (ex.); ($\bar{M} \hookrightarrow$ "$-M$", orientazione opposta)

$B \subseteq M$ boreliano, $\int_B \omega$ è ben def.;

$\int_{\sqcup_i B_i} \omega = \sum_i \int_{B_i} \omega$. ($\hookrightarrow$ unione finita disgiunta di boreliani)

Es.: $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, $\omega = dx^1 \wedge dx^2$ (dx^1 e dx^2 passano da $\mathbb{R}^2$ a T),

$$\int_T \omega = \int_D \omega + \int_X \omega = \int_D \omega = \int_{(0,1)\times(0,1)} 1 = 1.$$

$D = (0,1)\times(0,1)/\mathbb{Z}^2$, $X = T \setminus D$; X ha misura nulla; vedo D in $\mathbb{R}^2$.

M^m var., $\omega \in \Omega^k(M)$, $N^k \subseteq M^m$ sottovar. orientata.

Oss.: $f : N \to M$ qualsiasi, $\omega \in \Omega^k(M)$, il PULL-BACK di ω è $f^*\omega \in \Omega^k(N)$,
$(f^*\omega)(p)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(f(p))(df_p(v_1), \ldots, df_p(v_k))$, $f^* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(N)$.

Se $i : N \hookrightarrow M$, $\omega_{|N} = i^*\omega$, $\int_N \omega := \int_N i^*\omega$ (occhio al supporto cpt).

Ex.: T toro, $\gamma = (0,1)\times\{0\}/\mathbb{Z}^2$, $\int_\gamma dx^1 \wedge dx^2 = ?$