In $\mathbb{R}^n$, una 1-forma è $\omega = f_1 dx^1 + \ldots + f_n dx^n \rightsquigarrow X = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $X^i = f_i$,
$N \subseteq \mathbb{R}^n$ $\underset{\hookrightarrow \text{ori.}}{\text{sottovar.}}$ di dim. 1, $\int_N \omega = \int_N \vec{t} \cdot \vec{X}$ $\hookrightarrow$ prla (ex.).

$n=3$, una $(n-1)$-forma è $\omega = f_1 dx^2 \wedge dx^3 + f_2 dx^3 \wedge dx^1 + f_3 dx^1 \wedge dx^2 \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow X^i = f_i$, $N \subseteq \mathbb{R}^3$ ipersuperficie ori. $\Rightarrow$ "la normale è ori.",
$\int_N \omega = \int_N \vec{X} \cdot \vec{n}$.

Forma Volume

M var. ori..

Def.: una FORMA VOLUME è una n-forma $\omega \in \Omega^n(M)$ t.c. $\forall p \in M$
$\omega(p)(v_1, \ldots, v_n) > 0$ $\forall$ base positiva $v_1, \ldots, v_n$.

$(M, \omega) \rightsquigarrow \mathrm{Vol}(B) \in [0, +\infty]$ $\forall B \subseteq M$ boreliano, $\mathrm{Vol}(B) := \int_B \omega$.

Prop.: $\mathrm{Vol}(B) \geq 0$, se $\mathring{B} \neq \emptyset$ allora $\mathrm{Vol}(B) > 0$, etc.. Dim.: facile. $\square$

Oss.: in $\mathbb{R}^n$, $\omega(p)(v_1, \ldots, v_n) > 0$ $\forall p$ $\forall$ base positiva $\Longleftrightarrow \omega = f dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ con $f(p) > 0$ $\forall p$. Infatti, $\omega(p)(v_1, \ldots, v_n) = \underbrace{\det(v_1 | \ldots | v_n)}_{> 0} \omega(p)(e_1, \ldots, e_n)$ e per la base canonica è facile.

Oss.: un'orientazione su V, $\dim V = n$ è equivalente a un'orientazione su $\Lambda^n(V)$: $v_1, \ldots, v_n$ positiva $\rightsquigarrow v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ positivo.

Data M ori., $\exists$ ω forma volume.

1) $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n\}$ atlante ori., $\eta = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ in $\mathbb{R}^n$ (euclidea),
$\eta_i = \varphi_i^* \eta$, $\{\rho_i\}$ partizione dell'unità, $\omega = \sum \rho_i \omega_i$.
È forma volume: le forme volume sono chiuse per combinazione convessa.

2) $M \rightsquigarrow g$ metrica riemanniana $\rightsquigarrow \omega_g : \omega_g(p)(v_1, \ldots, v_n) = 1$ $\forall$ base $v_1, \ldots, v_n$ ortonormale positiva. È ben def. e forma normale.

Differenziale di una k-forma

M var., voglio $d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$. È locale: $d\omega(p)$ dipende solo da $\omega_{|U(p)}$.
$\omega \in \Omega^k(M)$, $d\omega = ?$ In carte, $\omega = \sum_I f_I dx^I$, $d\omega = \sum_I df_I \wedge dx^I =$
($f \in C^\infty(M) \Rightarrow df \in \Omega^1(M)$; in carte, $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$)
$= \sum_I \left(\sum_i \frac{\partial f_I}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge dx^I$.

Es.: $\omega = x^2 y \, dx - x \, dy$, $d\omega = d(x^2 y) \wedge dx - dx \wedge dy =$
$= 2xy \, \cancel{dx \wedge dx} + x^2 dy \wedge dx - dx \wedge dy = -(x^2+1) dx \wedge dy$.

Prop.: $d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$ è ben def. ed è l'unica applicazione $\underset{0)}{\text{lineare}}$ t.c.:
1) è locale;
2) se $k=0$, è il differenziale;
3) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$ $\forall \omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^h(M)$;
4) $d \circ d = 0$.

Dim.: verifichiamo che in carte valgono gli assiomi.
0), 1) e 2) ok dalla definizione, 3) e 4) sono conti.
Unicità ($\Rightarrow$ è ben def.): in carte, 0),…, 4) determinano $d\omega$.
$\omega = \sum f_I dx^I \underset{0)}{\Rightarrow} d\omega = \sum d(f_I dx^I) \underset{3)}{=} \sum (df_I \wedge dx^I + f^I d(dx^I))$.
$d(dx^I) = d(dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}) = 0$ per induzione su k (ex.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow d\omega = \sum df_I \wedge dx^I$. $\square$

In $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(\mathbb{R}^3) \\ \| & & \| & & \| & & \| \\ C^\infty(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\nabla} & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{rot}} & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\mathrm{div}} & C^\infty(\mathbb{R}^3) \end{array}$$

Orientazione: M var. ori. con $\partial M \neq \emptyset \Rightarrow \partial M$ eredita orientazione.
$\forall p \in \partial M$, $v_1, \ldots, v_{n-1}$ base di $T_p M$ è positiva $\Longleftrightarrow v, v_1, \ldots, v_{n-1}$ è base positiva per $T_p M$ con v uscente.

Teo. (Stokes): M^n ori., $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$; $\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$. Dim.: poi. $\square$

Def.: se $\dim M = 0$, un'orientazione per M è un segno $\pm$ a ogni cc.
Se $\dim M = 1$, $\rightarrow\!\!\bullet^{+}$, $\leftarrow\!\!\bullet^{-}$.

Casi semplici:

- $M = [a, b]$, $\omega = f$, $\int_a^b df = f(b) - f(a)$;
- $M = D$ dominio in $\mathbb{R}^2$, ω 1-forma, $\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$ (Gauss-Green);
- $M = D$ dominio in $\mathbb{R}^3$, ω 2-forma $\rightsquigarrow X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$,
$\int_{\partial D} \vec{X} \cdot \vec{n} = \int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega = \int_D \mathrm{div} \vec{X}$ (divergenza);
- $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie con bordo, ω 1-forma $\rightsquigarrow X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$,
$\int_{\partial S} \vec{X} \cdot \vec{t} = \int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega = \int_S \mathrm{rot} \vec{X}$ (Stokes).