Dim. (di Stokes): caso $M=\mathbb{R}^m_+$.

$$\omega=\sum_{i=1}^m f_i\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{i-1}\wedge dx^{i+1}\wedge\ldots\wedge dx^m,$$

$$d\omega=\sum_{i=1}^m \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial x^j}dx^j}_{df_i}\wedge dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{i-1}\wedge dx^{i+1}\wedge\ldots\wedge dx^m.$$

Per linearità, basta considerare $\omega=f\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{i-1}\wedge dx^{i+1}\wedge\ldots\wedge dx^m$,

$$d\omega=\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{i-1}\wedge dx^{i+1}\wedge\ldots\wedge dx^m=$$
$$=(-1)^{i-1}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^1\wedge\ldots\wedge dx^m.$$

Caso $i<m$: $\int_M d\omega=\int_{\mathbb{R}^m_+}(-1)^{i-1}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^1\wedge\ldots\wedge dx^m=$

$$=(-1)^{i-1}\int_{\mathbb{R}^m_+}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^1\ldots dx^m=(-1)^{i-1}\int_{\mathbb{R}^{m-1}_+}\Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i}_{\overset{\shortparallel}{0}\ \to\ f \text{ ha supp. cpt}}\Big)dx^1\ldots dx^{i-1}dx^{i+1}\ldots dx^m=0.$$

$$\int_{\partial M}\omega=\int_{\partial\mathbb{R}^m_+}i^*(f\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{i-1}\wedge dx^{i+1}\wedge\ldots\wedge dx^m)\xrightarrow{\ }\text{ex.: pull-back commuta con }\wedge\text{ e }d$$
$$=\int_{\partial\mathbb{R}^m_+}(f\circ i)(i^*dx^1)\wedge\ldots\wedge\underbrace{(i^*dx^m)}_{\overset{\shortparallel}{0}\ \to\ \text{se } i<m \text{ (ex.)}}.$$

Caso $i=m$: $\int_M d\omega=(-1)^{m-1}\int_{\mathbb{R}^m_+}\frac{\partial f}{\partial x^m}dx^1\ldots dx^m=$

$$=(-1)^{m-1}\int_{\mathbb{R}^{m-1}}\Big(\int_{\mathbb{R}_+}\frac{\partial f}{\partial x^m}dx^m\Big)dx^1\ldots dx^{m-1}=$$
$$=(-1)^m\int_{\mathbb{R}^{m-1}}f(x_1,\ldots,x_{m-1},0)\,dx^1\ldots dx^{m-1}.$$

$$\int_{\partial M}\omega=\int_{\partial\mathbb{R}^m_+}i^*(f\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^{m-1})\overset{i^*(dx^i)=dx^i,\ i<m}{=}\underbrace{(-1)^m}_{\text{vedi l'oss.}}\int_{\mathbb{R}^{m-1}}f(x_1,\ldots,x_{m-1},0)\,dx^1\ldots dx^{m-1}$$

Oss.: l'orientazione di $\mathbb{R}^{m-1}$ e $\partial\mathbb{R}^m_+$ coincidono solo per m pari (ex.).

In generale, $\omega\in\Omega^{m-1}_c(M)\Rightarrow\omega=\omega_1+\ldots+\omega_k$ con supp $\omega_i\subseteq U\xrightarrow[\text{carta}]{\varphi}\mathbb{R}^m_+$, si conclude per linearità. □

Spazi di Minkowski: $p,q\geq 0$, $p+q=m$, $\mathbb{R}^{p,q}=\mathbb{R}^m$ con $\eta=\begin{pmatrix}-I_q&0\\0&I_p\end{pmatrix}$

tensore metrico su $\mathbb{R}^{p,q}$ (segnatura (p,q)).

$\mathbb{R}^{3,1}$, $\mathbb{R}^{m-1,1}$.

Def.: M,N varietà pseudo-riemanniane (stessa segnatura) (g_M, g_N).

Un'ISOMETRIA è un diffeo. $f:M\to N$ t.c. $f^*(g_N)=g_M$, cioè $df_p:T_pM\to T_{f(p)}N$ è isometria.

Def.: $O(p,q)<GL(p+q,\mathbb{R})$ isometrie per il prodotto scalare $J=\begin{pmatrix}-I_q&0\\0&I_p\end{pmatrix}$, cioè $O(p,q)=\{A\in GL(m,\mathbb{R})\mid {}^TAJA=J\}$.

Oss.: $O(p,q)$ è gruppo di Lie di dim. $\frac{m(m-1)}{2}$, non cpt se $p,q\neq 0$ (ex.).

$O(m,0)=O(m)$. $O(p,q)\cong O(q,p)$ (ex.).

Non è mai connesso. $SO(p,q)=\{A\in O(p,q)\mid \det A=1\}\triangleleft_2 O(p,q)$ non viene sempre connesso.

Prop.: le seguenti sono isometrie di $\mathbb{R}^{p,q}$:

a) $x\mapsto x+b$ $\forall b\in\mathbb{R}^m$ fissato (perché η è costante);

b) $x\mapsto Ax$ $\forall A\in O(p,q)$ (perché ${}^TA\eta A=\eta$);

c) $x\mapsto Ax+b$ $\forall A\in O(p,q)$, $b\in\mathbb{R}^m$.

Teo.: non ce ne sono altre. Dim: poi (forse). □

Es.: $(\mathbb{R}^{3,1},\eta)$, $x\mapsto x+b$, $x\mapsto Ax$, $A\in O(3,1)$.

$\eta=J=\begin{pmatrix}-1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$.

Def.: $0\neq v\in T_xM$, M pseudo-riemanniana è di tipo SPAZIO, LUCE, TEMPO se $\langle v,v\rangle$ è >0, $=0$, <0.

$\gamma:I\to M$ è di tipo S/L/T se $\forall t\in I$ $\gamma'(t)$ è di tipo S/L/T.

Ogni particella che si muove è descritta da una curva $\gamma:I\to M$ di tipo tempo o luce (a seconda che $m>0$ o $m=0$).

Def.: il TEMPO PROPRIO di $\gamma:[a,b]\to M$ di tipo tempo è

$\tau:[a,b)\to[0,+\infty)$.

$t\mapsto\int_a^t\sqrt{|\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle|}\,dt.$

Def.: in generale, M pseudo-riemanniana, $\gamma:[a,b]\to M$,

$L(\gamma)=\int_a^b\sqrt{|\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle|}\,dt$ è la LUNGHEZZA di γ.

Prop.: $L(\gamma)$ è invariante per riparametrizzazioni di γ. Dim.: vedi analisi 1 e 2. □

Ogni curva di tipo tempo ha prla.

Es.: $J=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&&&\\0&&B&\\0&&&\end{pmatrix}$, $B\in O(3)$ preserva la foliazione $t=k$;

$A=\begin{pmatrix}\cosh\theta&-\sinh\theta&0&0\\\sinh\theta&\cosh\theta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ (Lorentz boost) non preserva la foliazione. ($\Rightarrow$ non c'è simultaneità)

Un campo elettromagnetico su $\mathbb{R}^{3,1}$ è una 2-forma.

$\omega\in\Omega^2(\mathbb{R}^4)$, $\omega(x)\in A(4)$, $\omega=\begin{pmatrix}0&-E_1&-E_2&-E_3\\E_1&0&B_3&-B_2\\E_2&-B_3&0&B_1\\E_3&B_2&-B_1&0\end{pmatrix}=:F$.

Forza di Lorentz: $\begin{cases}\dfrac{d\vec{u}}{dt}=\dfrac{q}{m}(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B});\\[2mm] \dfrac{d\overset{\text{energia}}{E}}{dt}=q\vec{E}\cdot\vec{u}\end{cases}$ $\gamma:I\to\mathbb{R}^{3,1}$,

$F^i{}_j=F_{aj}\eta^{ai}$, $\gamma''=\frac{q}{m}F(\gamma')$.

Maxwell: $\begin{cases}\operatorname{rot}\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t};\\ \operatorname{div}\vec{B}=0\end{cases}$ $dF=0$.

$\delta F=J\to$ quadri-corrente

serve $*$ di Hodge