Coomologia di De Rham

Def.: una k-forma $\omega \in \Omega^k(M)$ è CHIUSA se $d\omega = 0$,
è ESATTA se $\exists\, \eta \in \Omega^{k-1}(M)$ t.c. $\omega = d\eta$.

Oss.: esatta $\Rightarrow$ chiusa.

Def.: $Z^k(M) := \{k\text{-forme chiuse}\} \subseteq \Omega^k(M)$ sottospazio vett.,
$B^k(M) := \{k\text{-forme esatte}\} \subseteq Z^k(M)$ " " .

Def.: $H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$ è il k-esimo
GRUPPO DI COOMOLOGIA DI DE RHAM.
$b^k(M) := \dim H^k(M)$ è il k-esimo NUMERO DI BETTI.

Oss.: $\Omega^k(M) = \{0\}\ \forall k > n \Rightarrow b^k(M) = 0\ \forall k > n$.

Se $b^k(M) < +\infty\ \forall k$, $\chi(M) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b^i(M)$ è la
CARATTERISTICA DI EULERO-POINCARÉ di M.

Oss.: $M = M^1 \sqcup \ldots \sqcup M^h$ cc,
$$\Omega^k(M) = \Omega^k(M^1) \oplus \ldots \oplus \Omega^k(M^h),$$
$$Z^k(M) = Z^k(M^1) \oplus \ldots \oplus Z^k(M^h),$$
$$B^k(M) = B^k(M^1) \oplus \ldots \oplus B^k(M^h),$$
$$H^k(M) = H^k(M^1) \oplus \ldots \oplus H^k(M^h).$$

Prop., M conn., $H^0(M) = Z^0(M) = \{f \in C^\infty(M) \mid df = 0\} =$
$= \{f \in C^\infty(M) \text{ loc. cost.}\} \underset{M \text{ conn.}}{=} \{f \in C^\infty(M) \text{ cost.}\} = \mathbb{R}$.

Cor.: M qualsiasi, $b^0(M) = \#\text{cc}$ di M.

Prop.: $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $H^1(\mathbb{R}) = 0$, $H^k(\mathbb{R}) = 0\ \forall k \geq 2$.

Dim.: $H^1(\mathbb{R}) = \{1\text{-forme chiuse di } \mathbb{R}\}/\{1\text{-forme esatte di } \mathbb{R}\} \overset{Z^n(M) \overset{n=\dim(M)}{=} \Omega^n(M)}{=}$
$= \{1\text{-forme di } \mathbb{R}\}/\{1\text{-forme esatte di } \mathbb{R}\}$.
$\omega(x) = f(x)dx$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $\omega = dF$. $\square$

Lemma di Poincaré: $H^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$. Dim.: poi. $\square$

Oss.: M cpt., ori., $\partial M = \emptyset \Rightarrow H^n(M)$ non è banale.
Infatti, $\exists$ forma volume ω, che è chiusa; non è esatta:
se PA $\omega = d\eta$, Stokes $\Rightarrow \int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = 0$, ma
$\int_M \omega = \mathrm{Vol}(M) > 0$.

Es.: $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, (ρ, θ) coordinate polari, $d\theta \in \Omega^1(M)$.
$d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$ è chiusa perché loc. esatta, ma non è
esatta: $\int_{S^1} d\theta = 2\pi$, si usa di nuovo Stokes.

In generale, $\omega \in \Omega^k(M)$, $S \subseteq M$ sottovarietà di dim. k cpt, ori., $\partial S = \emptyset$,
se $\int_S \omega \neq 0$ allora ω non è esatta.

Funtorialità: $f: M \to N$ liscia induce $f^*: \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$.
Manda chiuse in chiuse e esatte in esatte perché $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$.
Allora è ben def. $f^*: H^k(N) \to H^k(M)$ t.c.
$id^* = id_{H^k}$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^* \Rightarrow$ se f diffeo., f^* isomorfismo.

Prop.: M var., $H^*(M) = \bigoplus_{k \geq 0} H^k(M)$ è un'algebra con $\wedge$,
indotta da $\Omega^*(M)$.

Dim.: $\alpha \wedge d\beta = \pm d(\alpha \wedge \beta) \pm d\alpha \wedge \beta$. Definisco $[\alpha] \wedge [\eta] = [\alpha \wedge \eta]$ e
verifico che è ben def.. $\square$

Identità magica di Cartan

$\Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M)$. $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\iota_X: \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(M)$,
$\iota_X(\omega)(p)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \omega(p)(X(p), v_1, \ldots, v_{k-1})$.
$\mathcal{L}_X: \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$.

Prop.: $\mathcal{L}_X$ commuta con d e ι_X, $\mathcal{L}_X = \iota_X \circ d + d \circ \iota_X$.

Teo. (invarianza per omotopia): $f, g: M \to N$ lisce omotope $\Rightarrow$
$\Rightarrow f^* = g^*: H^*(N) \to H^*(M)$.

Def.: un COMPLESSO DI COCATENE C è $\ldots \xrightarrow{d_{k-1}} C_k \xrightarrow{d_k} C_{k+1} \xrightarrow{d_{k+1}} C_{k+2} \xrightarrow{d_{k+2}} \ldots$
successione di s.v. t.c. $d \circ d = 0$; $H^k(C) = \underset{\text{COCICLI}}{Z^k(C)} / \underset{\text{COBORDI}}{B^k(C)}$,
$Z^k(C) = \mathrm{Ker}\, d_k$, $B^k(C) = \mathrm{Im}\, d_{k-1}$.

Un MORFISMO $C \xrightarrow{f} D$ di complessi di cocatene è

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to & C_{k-1} & \to & C_k & \to & C_{k+1} & \to \ldots \\ & \downarrow f_{k-1} & & \downarrow f_k & & \downarrow f_{k+1} & \\ \ldots \to & D_{k-1} & \to & D_k & \to & D_{k+1} & \to \ldots \end{array}$$
t.c. commuta.

Oss.: f induce $f^*: H^k(D) \to H^k(C)$.

Def.: una OMOTOPIA fra morfismi f, g è $h_k: C_k \to D_{k-1}$ t.c.
$f - g = d \circ h + h \circ d$.

Oss.: se $\exists\, h$ omotopia, $f^* = g^*$.

Dim. (del teo.): abbiamo $f^*, g^*: \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ morfismi di
complessi di cocatene. Devo costruire $h: \Omega^k(N) \to \Omega^{k-1}(M)$
usando l'omotopia $F: M \times \mathbb{R} \to N$, $F_0 = f$, $F_1 = g$.
$\omega \in \Omega^k(N)$, $X = \frac{\partial}{\partial t}$ su $M \times \mathbb{R}$, $i_t: M \to M \times \mathbb{R}$, $p \mapsto (p, t)$,
$$h(\omega) = \int_0^1 (i_t^* \iota_X F^* \omega)\, dt.$$
$$(g^* - f^*)(\omega) = (F_1^* - F_0^*)(\omega) = F_1^*\omega - F_0^*\omega = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} F_t^* \omega\, dt =$$
$$= \int_0^1 (i_t^* \mathcal{L}_X F^* \omega)\, dt \underset{\text{Cartan}}{=} \int_0^1 (i_t^*(d\iota_X + \iota_X d))(F^*\omega)\, dt =$$
$$= \int_0^1 (i_t^* d\iota_X F^* \omega)\, dt + \int_0^1 (i_t^* \iota_X d F^* \omega)\, dt =$$
$$= d\left(\int_0^1 (i_t^* \iota_X F^* \omega)\, dt\right) + \int_0^1 (i_t^* \iota_X F^*(d\omega))\, dt =$$
$$= dh(\omega) + hd(\omega). \square$$