Cor.: M e N omotopicamente equiv. $\Rightarrow H^*(M)=H^*(N) \Rightarrow b^i(M)=b^i(N)$.
Dim.: $f\circ g\sim id_N$, $g\circ f\sim id_M \Rightarrow g^*\circ f^*=(f\circ g)^*=id_N^*=id$,
$f^*\circ g^*=id$. $\square$

Cor. (lemma di Poincaré): $M\cong\mathbb{R}^n$ o contrattile $\Rightarrow H^*(M)=H^*(\mathbb{R})$.
Cor.: M cpt, ori., $\partial M=\varnothing$ non è mai contrattile, anzi non è omotopicamente equiv. a N con $\dim N<\dim M$.
Dim.: $n=\dim M$, $H^n(M)\neq 0=H^n(N)$. $\square$

Successione di Mayer-Vietoris

Def.: un complesso di cocatene $\ldots\to C^k\to C^{k+1}\to\ldots$ è una SUCCESSIONE ESATTA se $H^k=0\ \forall k$, cioè $\operatorname{Im} d^k=\operatorname{Ker} d^{k+1}\ \forall k$.
Es.: $0\to V\xrightarrow{f}W$ esatta $\iff f$ ini.,
$V\xrightarrow{f}W\to 0$ esatta $\iff f$ suri.,
$0\to V\xrightarrow{f}W\to 0$ esatta $\iff f$ isomorfismo.
Successione esatta corta: $0\to V\xrightarrow{f}W\xrightarrow{g}Z\to 0$, f ini., g suri., $\operatorname{Im} f=\operatorname{Ker} g$.
Ex.: $\ldots\to V_i\xrightarrow{d_i}V_{i+1}\to V_{i+2}\to\ldots$ esatta, $\dim V_i<+\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow \ldots\leftarrow V_i^*\xleftarrow{d_i^*}V_{i+1}^*\leftarrow V_{i+2}^*\leftarrow\ldots$ esatta,
$\ldots\to V_i\otimes W\xrightarrow{d_i\otimes id}V_{i+1}\otimes W\to V_{i+2}\otimes W\to\ldots$ esatta.
Ex.: $0\to V_1\to V_2\to\ldots\to V_k\to 0$ esatta $\Rightarrow \sum_i(-1)^i\dim V_i=0$.

Sia $0\to C\xrightarrow{f}D\xrightarrow{g}E\to 0$ succ. esatta corta di complessi di cocatene (cioè f_k ini., g_k suri., $\operatorname{Im} f_k=\operatorname{Ker} g_k\ \forall k$).
Teo.: $\exists$ succ. esatta lunga $\ldots\to H^{k-1}(C)\xrightarrow{f^*}H^{k-1}(D)\xrightarrow{g^*}H^{k-1}(E)\xrightarrow{\delta}$
$\xrightarrow{\delta}H^k(C)\xrightarrow{f^*}H^k(D)\xrightarrow{g^*}H^k(E)\to\ldots$,
Dim.: $\delta: H^{k-1}(E)\to H^k(C)$, $[\alpha]\mapsto[\bar\beta]$,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C^{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & D^{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & E^{k-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C^k \arrow[r] & D^k \arrow[r] & E^k \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\bar\alpha\mapsto\alpha$; $\bar\beta\mapsto\beta\mapsto 0$;

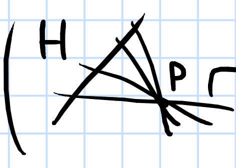
bisogna verificare che è ben def. e che la succ. è esatta. $\square$

Teo. (successione di Mayer-Vietoris): $M=U\cup V$ aperti.

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "k"] & \\ U\cap V \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & M \\ & V \arrow[ur, "l"'] & \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} & \Omega^k(U) \arrow[dl, "i^*"'] & \\ \Omega^k(U\cap V) & & \Omega^k(M) \arrow[ul, "k^*"'] \arrow[dl, "l^*"] \\ & \Omega^k(V) \arrow[ul, "j^*"] & \end{tikzcd},$$

$0\to\Omega^k(M)\xrightarrow{(k^*,l^*)}\Omega^k(U)\oplus\Omega^k(V)\xrightarrow{i^*-j^*}\Omega^k(U\cap V)\to 0$ è una succ. esatta di cocatene $\forall k$.
Dim.: 1) (k^*,l^*) ini.; 2) $\operatorname{Im}(k^*,l^*)=\operatorname{Ker}(i^*-j^*)$; 3) i^*-j^* suri..
1) $(k^*,l^*)\omega=0 \Rightarrow k^*\omega=0,\ l^*\omega=0 \Rightarrow \omega_{|U}=0,\ \omega_{|V}=0 \Rightarrow \omega=0$.
2) $(\subseteq)$ $(i^*-j^*)(k^*,l^*)\omega=(i^*-j^*)(k^*\omega,l^*\omega)=i^*k^*\omega-j^*l^*\omega=$
$=\omega_{|U\cap V}-\omega_{|U\cap V}=0$.
$(\supseteq)$ $(i^*-j^*)(\omega,\eta)=0 \Rightarrow \omega_{|U\cap V}=\eta_{|U\cap V} \Rightarrow$ posso incollarle a formare una μ globale $\Rightarrow(\omega,\eta)=(k^*,l^*)\mu$.
3) $\{\rho_U,\rho_V\}$ partizione dell'unità subordinata a $\{U,V\}$,
$\omega\in\Omega^k(U\cap V)$, $\rho_U\cdot\omega$ è definita in $U\cap V$ ed estendibile a 0 su $V\setminus(U\cap V)\Rightarrow\rho_U\cdot\omega\in\Omega^k(V)$, e $\rho_V\cdot\omega\in\Omega^k(U)$.
$\omega=i^*(\rho_V\cdot\omega)-j^*(-\rho_U\cdot\omega)$. $\square$

Teo.: $\ldots\to H^{k-1}(U\cap V)\to H^k(M)\to H^k(U)\oplus H^k(V)\to H^k(U\cap V)\to H^{k+1}(M)\to\ldots$ è esatta. Dim.: segue da MV e dal teo. precedente. $\square$
Teo.: $H^k(S^n)=\begin{cases}\mathbb{R} & \text{se } k=0,n \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$ $(n\geq 1)$.
Dim.: induzione su n. $S^n=U\cup V$, $U=S^n\setminus\{Nord\}$, $V=S^n\setminus\{Sud\}$;
$U,V\cong\mathbb{R}^n$, $U\cap V\cong S^{n-1}\times(-1,1)\sim S^{n-1}$.
$n=1$: $0\to \underset{\mathbb{R}}{\underset{\parallel}{H^0(S^1)}}\to \underset{\mathbb{R}}{\underset{\parallel}{H^0(\mathbb{R})}}\oplus H^0(\mathbb{R})\to \underset{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}{\underset{\parallel}{H^0(S^0)}}\to H^1(S^1)\to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow H^1(S^1)=\mathbb{R}$.
$n>1$: $\underset{0}{\underset{\parallel}{H^{k-1}(\mathbb{R}^n)}}\oplus \underset{0}{\underset{\parallel}{H^{k-1}(\mathbb{R}^n)}}\to H^{k-1}(S^{n-1})\xrightarrow{\cong}H^k(S^n)\to \underset{0}{\underset{\parallel}{H^k(\mathbb{R}^n)}}\oplus \underset{0}{\underset{\parallel}{H^k(\mathbb{R}^n)}}$
se $k>1$. $k=1$ come sopra. $\square$

Teo.: $H^k(\mathbb{CP}^n)=\begin{cases}\mathbb{R} & \text{se } 0\leq k\leq 2n \text{ pari} \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases} \Rightarrow S^4\not\sim\mathbb{CP}^2$.
Dim.: $H=\{x_1=0\}$, $P=[1,0,\ldots,0]$, $U=\mathbb{CP}^n\setminus H$, $V=\mathbb{CP}^n\setminus\{P\}$;
$U\cong\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^{2n}\sim\{pto\}$, V è un fibrato con base H e fibra $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$
(

rette complesse proiettive, senza P sono $\mathbb{C}$) $\Rightarrow V\sim H\cong\mathbb{CP}^{n-1}$.
$U\cap V\cong\mathbb{R}^{2n}\setminus\{p\}\cong S^{2n-1}\times\mathbb{R}\sim S^{2n-1}$.
Induzione su n. $n=1$: $\mathbb{CP}^1\cong S^2$, ok.
$n>1$: per k generico,
$\underset{0}{\underset{\parallel\, k\neq 1,2n}{H^{k-1}(S^{2n-1})}}\to H^k(\mathbb{CP}^n)\to \underset{0}{\underset{\parallel\, k\neq 0}{H^k(\{pto\})}}\oplus H^k(\mathbb{CP}^{n-1})\to \underset{0}{\underset{\parallel\, k\neq 2n-1,0}{H^k(S^{2n-1})}} \Rightarrow$
$\Rightarrow H^k(\mathbb{CP}^n)\cong H^k(\mathbb{CP}^{n-1})$. Gli altri casi a parte. $\square$

Coomologia a supporto compatto

M, $\ldots\to\Omega_c^k(M)\xrightarrow{d}\Omega_c^{k+1}(M)\to\ldots$, $H_c^k(M)$, $b_c^k(M)=\dim H_c^k(M)$.
Es.: $H_c^k(\mathbb{R})=\begin{cases}\mathbb{R} & \text{se } k=1 \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$.
$\underset{\text{come l'altra volta}}{H_c^0(\mathbb{R})}=\{f\in C^\infty(\mathbb{R})$ cost. a supp. cpt.$\}\underset{\mathbb{R}\text{ non cpt}}{=}\{0\}$. Vale anche per M connessa non cpt.
$H_c^1(\mathbb{R})=\{$1-forme $\omega=f(x)dx$ a supp. cpt$\}/\{$1-forme esatte a supp cpt$\}$.
M^n ori., $\partial M=\varnothing$, $\Omega_c^n(M)\to\mathbb{R}$, $\omega\mapsto\int_M\omega$ è facilmente suri.;
se $\omega=d\eta$, $\int_M\omega=\int_{\partial M}\eta=0 \Rightarrow$ ho $H_c^n(M)\to\mathbb{R}$, $[\omega]\mapsto\int_M\omega$.
$H_c^1(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, $[\omega]\mapsto\int_{\mathbb{R}}\omega$ è ini., cioè $\omega\in\Omega_c^1(\mathbb{R})$ t.c. $\int_{\mathbb{R}}\omega=0$ è esatta:
$\omega(x)=f(x)dx$, $\int_{\mathbb{R}}\omega=0$, $F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)dt$ è a supp. cpt, e $dF=\omega$.