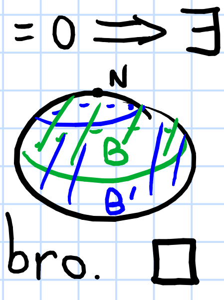
Lemma (di Poincaré): $H^k_c(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 0 & \text{per } k \neq n \\ \mathbb{R} & \text{per } k = n \end{cases}$.

Dim.: $k \neq 0, n$. $\omega \in Z^k_c(\mathbb{R}^n)$, $\exists\, \eta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ t.c. $d\eta = \omega$. $\because$
$\mathbb{R}^n = S^n \setminus \{Nord\}$, $\omega \in Z^k_c(\mathbb{R}^n) \rightsquigarrow \omega \in Z^k_c(S^n) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, \eta \in \Omega^{k-1}(S^n)$ t.c. $d\eta = \omega$. Su $B = S^n \setminus C$,
$C \supseteq \operatorname{supp}\omega$ chiuso, $\eta_{|B} = \eta'$ t.c. $d\eta' = 0 \Rightarrow \exists\, \varepsilon \in \Omega^{k-2}(S^n)$
t.c. $d\varepsilon = \eta'$. $B' \supseteq C$ aperto,



$\rho_B, \rho_{B'}$ partizioni dell'unità,
$\rho_B \varepsilon \in \Omega^{k-2}(S^n)$, $\omega' = \dots$ $\because$ vedi libro. $\square$

"Funtorialità"

$f: M \to N$ propria $\Rightarrow f^*: \Omega^k_c(N) \to \Omega^k_c(M)$.
$H^k_c(N) \to H^k_c(M)$

$U \subseteq M$ aperto, $i: U \hookrightarrow M \rightsquigarrow i_*: \Omega^k_c(U) \to \Omega^k_c(M)$.
$\omega \mapsto \omega$ estesa a 0 fuori da U

Mayer-Vietoris a supporto compatto

$M = U \cup V$.

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "l"] & \\ U \cap V \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "j"'] & & M \\ & V \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} & \Omega^k_c(U) \arrow[dr, "l_*"] & \\ \Omega^k_c(U \cap V) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[dr, "j_*"'] & & \Omega^k_c(M). \\ & \Omega^k_c(V) \arrow[ur, "m_*"'] & \end{tikzcd}$$

Teo.: $0 \to \Omega^k_c(U \cap V) \xrightarrow{(i_*, j_*)} \Omega^k_c(U) \oplus \Omega^k_c(V) \to$
$\xrightarrow{l_* - m_*} \Omega^k_c(M) \to 0$ è esatta.

Dim.: 1) (i_*, j_*) ini.; 2) $\operatorname{Im}(i_*, j_*) = \operatorname{Ker}(l_* - m_*)$; 3) $l_* - m_*$ suri.
1) Segue da i_*, j_* ini..
2) $\subseteq$: $l_* \circ i_* = m_* \circ j_*$; $\supseteq$: se $l_* \omega = m_* \eta$, $\omega_{|U \cap V} = \eta_{|U \cap V}$,
$\omega_{|U \setminus (U \cap V)} = 0$, $\eta_{|V \setminus (U \cap V)} = 0$.
3) Partizioni dell'unità. $\square$

Quindi: $\dots \to H^k_c(U \cap V) \to H^k_c(U) \oplus H^k_c(V) \to H^k_c(M) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}_c(U \cap V) \to \dots$.

Oss.: H^k_c non è invariante per omotopia (vedi gli $\mathbb{R}^n$).

Prop.: $M = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$ infinite cc. $\Omega^k(M) = \prod_{i \in \mathbb{N}} \Omega^k(M_i)$;
$\Omega^k_c(M) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \Omega^k_c(M_i)$. Stesso con H^k e H^k_c.

Oss.: V_i, $i \in \mathbb{N}$ s.v., $\left(\bigoplus_i V_i\right)^* = \prod_i V_i^*$.

Dualità di Poincaré

M ori. e senza bordo.

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^k_c(M) \times \Omega^{n-k}(M) & \xrightarrow{\wedge} & \Omega^n_c(M) & \xrightarrow{\int} & \mathbb{R} \\ (\omega, \eta) & \longmapsto & \omega \wedge \eta & \longmapsto & \int \omega \wedge \eta \end{array}, \text{ induce}$$

$$\begin{array}{ccc} H^k_c(M) \times H^{n-k}(M) & \to & \mathbb{R} \\ ([\omega], [\eta]) & \longmapsto & \int \omega \wedge \eta \end{array}; \text{ è ben def.:}$$

$$\int \omega \wedge (\eta + d\varepsilon) = \int \omega \wedge \eta + \underbrace{\int \omega \wedge d\varepsilon}_{= \pm \underbrace{\int d(\omega \wedge \varepsilon)}_{= 0 \to \text{Stokes}} \pm \int \underbrace{d\omega}_{= 0} \wedge \varepsilon}.$$

Abbiamo $PD: H^{n-k}(M) \to H^k_c(M)^*$.
$[\eta] \mapsto ([\omega] \mapsto \int \omega \wedge \eta)$

Teo.: PD è un isomorfismo.

Oss.: M cpt $\Rightarrow H^k_c(M) = H^k(M)$.

Dim. (del teo.): Lemma dei 5:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\varepsilon"] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \end{tikzcd}$$

con righe esatte di s.v. che commuta;
$\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ iso. $\Rightarrow \gamma$ iso.. Dim.: ex.. $\square$

Lemma (induzione sugli aperti):
M^n var., $\mathcal{A} \subseteq \{\text{aperti di } M\}$ t.c.
1) se $U \subseteq M$ è diffeo. a $\mathbb{R}^n$, $U \in \mathcal{A}$;
2) $U, V, U \cap V \in \mathcal{A} \Rightarrow U \cup V \in \mathcal{A}$;
3) $U_i \in \mathcal{A}$ disgiunti $\Rightarrow \bigsqcup_i U_i \in \mathcal{A}$;
allora $\mathcal{A} = \{\text{aperti di } M\}$. Dim.: no (vedi libro). $\square$

$\mathcal{B} = \{U \subseteq M \text{ aperto} \mid PD: H^k(U) \to H^{n-k}_c(U)^* \text{ è iso.}\}$.

Mostro che $\mathcal{B}$ soddisfa 1), 2) e 3) $\Rightarrow M \in \mathcal{B}$.

1) $PD: H^k(\mathbb{R}^n) \to H^{n-k}_c(\mathbb{R}^n)^*$ iso.: è tutto banale tranne il caso $k = 0$. $PD: \underbrace{H^0(\mathbb{R}^n)}_{= \mathbb{R}} \to \underbrace{H^n_c(\mathbb{R}^n)}_{= \mathbb{R}}{}^*$, mostro che non è banale.

$1 \in H^0(\mathbb{R}^n)$, $1 \mapsto (\underset{\substack{n\text{-forma} \\ \text{a supp. cpt}}}{\omega} \longmapsto \int \omega)$; $\exists\, \omega$ t.c. $\int \omega \neq 0$, ok.

2)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) \arrow[r] \arrow[d, "(PD, PD)"] & H^{k-1}(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d, "PD"] & H^k(U \cup V) \arrow[r] \arrow[d, "PD"] & H^k(U) \oplus H^k(V) \arrow[r] \arrow[d, "(PD, PD)"] & H^k(U \cap V) \arrow[d, "PD"] \\ H^{n-k+1}_c(U)^* \oplus H^{n-k+1}_c(V)^* \arrow[r] & H^{n-k+1}_c(U \cap V)^* \arrow[r] & H^{n-k}_c(U \cup V)^* \arrow[r] & H^{n-k}_c(U)^* \oplus H^{n-k}_c(V)^* \arrow[r] & H^{n-k}_c(U \cap V)^* \end{tikzcd}$$

commuta (forse a meno di segno, ma tanto non verifichiamo), allora ok per il lemma dei 5.

3)
$$\begin{array}{ccc} PD: H^k(\bigsqcup_i U_i) & \longrightarrow & H^{n-k}_c(\bigsqcup_i U_i)^* \\ \parallel & & \parallel \\ \prod_i H^k(U_i) & \xrightarrow{\sim} & \left(\bigoplus_i H^{n-k}_c(U_i)\right)^* \end{array} \text{ commuta. } \square$$

Conseguenze:

Prop.: M cpt, ori., $\partial M = \emptyset \Rightarrow b^i(M) < +\infty\ \forall i$ e $b^i(M) = b^{n-i}(M)\ \forall i$.

Dim.: $H^k(M) \underset{\sim}{\xrightarrow{PD}} H^{n-k}(M)^* \underset{\sim}{\xrightarrow{PD^*}} H^k(M)^{**}$, $L: V \to V^{**}$ canonico,
la composizione è L,
è iso. $\Rightarrow \dim V < +\infty$. $\square$

Se M cpt, ori., $\partial M = \emptyset$, $\dim M = 2k$,

$$\begin{array}{ccc} H^k(M) \times H^k(M) & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \\ (\omega, \eta) & \underset{\text{non degenere}}{\longmapsto} & \int \omega \wedge \eta \\ & & \parallel \\ & & \int (-1)^k \eta \wedge \omega \end{array}$$

$\to$ se k pari, h simmetrica
$\to$ se k dispari, h antisimmetrica

Nel caso h simmetrica, ha segnatura (i_+, i_-); $\sigma = i_+ - i_-$.

$\sigma(\bar{M}) = -\sigma(M)$.
$\hookrightarrow$ orientazione opposta

Def.: M ori. è SPECCHIABILE se $\exists\, \varphi: M \to M$ diffeo. che inverte l'ori..

Prop.: M specchiabile $\Rightarrow \sigma(M) = 0$. Dim.: $\sigma(M) = \sigma(\bar{M}) = -\sigma(M)$. $\square$

Cor.: $\mathbb{CP}^2$ non è specchiabile.

Dim.: $b^2(\mathbb{CP}^2) = 1 \Rightarrow \sigma(\mathbb{CP}^2) = \pm 1$. $\square$