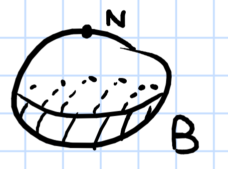
Dim. (del lemma di Poincaré): $\omega \in \Omega^k_c(\mathbb{R}^n) \rightsquigarrow \Omega^k_c(S^n)$,



$\mathrm{supp}\,\omega \subseteq B$, $\exists\, \eta \in \Omega^{k-1}(S^n)$ con $\omega = d\eta$; $d\eta = 0$ su
$B' = S^n \setminus \bar{B} \Rightarrow \exists\, \alpha \in \Omega^{k-2}(B')$ t.c. $d\alpha = \eta$.
$\eta' = \eta - d(\rho\alpha) \Rightarrow d\eta' = d\eta = \omega$, $\mathrm{supp}\,\eta'$ è cpt (è lontano da N). □
(ρ: bump function in B' che è 1 in un intorno di N)

Formula di Künneth

M, N var., $\pi_M: M\times N \to M$, $\pi_N: M\times N \to N$,

$$\Omega^k(M) \times \Omega^h(N) \to \Omega^{k+h}(M\times N) \quad \text{induce}$$
$$(\omega,\eta) \mapsto \pi_M^*\omega \wedge \pi_N^*\eta$$

$$\begin{tikzcd} H^k(M)\times H^h(N) \arrow[r] \arrow[dr] & H^{k+h}(M\times N) \\ & H^k(M)\otimes H^h(N) \arrow[u] \end{tikzcd}$$ bilineare;

Teo.: $\bigoplus_{k=0}^{l} H^k(M)\otimes H^{l-k}(N) \xrightarrow{\sim} H^l(M\times N)$ è isomorfismo se $b^i(M) < +\infty\ \forall i$ o $b^i(N) < +\infty\ \forall i$.

Dim.: no, ma si fa come la dualità di Poincaré. □

Cor.: $\sum_{k=0}^{l} b^k(M)\, b^{l-k}(N) = b^l(M\times N)$.

Cor./Ex.: $b^l(\underbrace{S^1\times\ldots\times S^1}_{n}) = \binom{n}{l}$. ⌈Teo.: $H^1(M) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1 M, \mathbb{R})$.⌋

Varietà (pseudo-)riemanniane

$(M,g) \rightsquigarrow L(\gamma)$
$\rightsquigarrow \omega$ forma volume (se M ori.)

In carte: $g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \xRightarrow{\text{Prop.}}$
$\Rightarrow \omega = \sqrt{|\det g_{ij}|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$.

Dim. (della prop.): $p \in \mathbb{R}^n$, $g_{ij}(p)$ simmetrica. A meno di ruotare gli assi, $g_{ij}(p) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$; $\sqrt{|\det g_{ij}|} = \sqrt{|\lambda_1|}\cdot\ldots\cdot\sqrt{|\lambda_n|}$. □

Modifiche conformi

Es.: $\mathbb{R}^{p,q} = \left(\mathbb{R}^n, \eta = \begin{pmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_p \end{pmatrix}\right)$ $(\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n,0})$.

Def.: (M,g), $f \in C^\infty(M)$ mai nulla, $\bar{g} = fg$. Se $f>0$, $\bar{g}$ ha la stessa segnatura di g. Se $f<0$, $\bar{g}$ ha segnatura opposta a g.

Se g è def. positivo, sono definiti $\forall v, w \in T_pM$ $\|v\|, \|w\|$ e l'angolo fra v e w $\arccos\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$.

Moltiplicando per f, gli angoli non cambiano, tutto il resto sì.

Def.: lo SPAZIO IPERBOLICO è (B^n, g), $B^n \subseteq \mathbb{R}^n$, $g = \left(\frac{2}{1-\|x\|^2}\right)^2 g^E$ (g^E: euclideo).

Questo è 1) il MODELLO DEL DISCO.
2) $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ half-space, $g = \frac{1}{x_n^2} g^E$.
3) Iperboloide.

Def.: (M,g) var. pseudo-r.. Una sottovarietà $N \subseteq M$ è detta SOTTOVARIETÀ PSEUDO-R. se $\forall p \in N$ $T_pN \subseteq T_pM$ è non degenere, cioè $g|_{T_pN}$ è non degenere.

Oss.: N eredità $g|_N$ struttura pseudo-r..

Oss.: se (M,g) è riemanniana, la condizione è vuota e N è anch'essa riemanniana.

Iperboloide: $\mathbb{R}^{n,1}$ Minkowski, $\langle x,y\rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_{n+1}y_{n+1}$.

Prop.: $I^n = \{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \langle x,x\rangle = -1\} \cap \{x_1 > 0\}$ è sottovarietà riemanniana.

Ex.: 1) $\mathbb{R}^{n,1} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x,x\rangle$, -1 è val. reg.;
2) $\forall x \in I^n$, $T_xI^n = x^\perp$. x tempo $\Rightarrow x^\perp$ spazio.

Teo.: i tre modelli sono isometrici.

Inversione lungo sfere: $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $S = S(x_0, r) = \{x \mid d(x,x_0) = r\}$, $r > 0$.
$i: \mathbb{R}^n\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}^n\setminus\{x_0\}$ "inversione circolare";
$i: S^n \to S^n$, $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, $x_0 \mapsto \infty$, $\infty \mapsto x_0$.

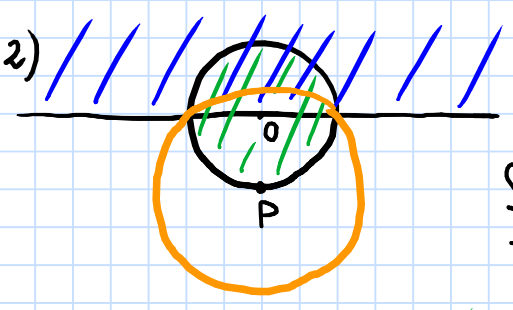
Def.: $\varphi: M \to N$ è diffeo. fra var. riemanniane è CONFORME se $\forall p \in M$ $d\varphi_p: T_pM \to T_pN$ è isometria composta a un riscalamento per un certo $f(p) > 0$, $f \in C^\infty(M)$.

Oss.: $(M,g) \rightsquigarrow fg = \bar{g}$, $id_M: (M,g) \to (M,\bar{g})$ è conforme.

Oss.: ogni biolo. fra aperti di $\mathbb{C}$ è conforme.

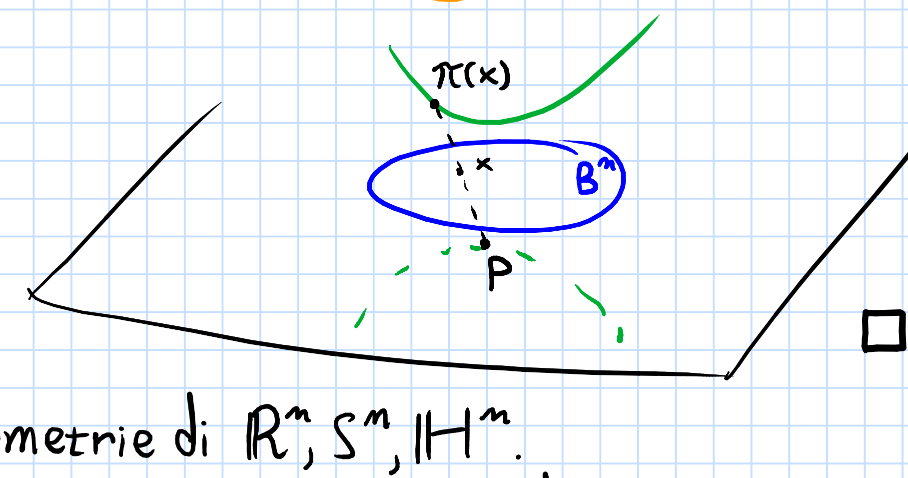
Ex.: la proiezione stereografica è conforme.
Anche le inversioni lo sono.

Dim. (del teo.): 1)⟷2)



$P = (-1, 0, \ldots, 0)$,
i inversione $S(P, \sqrt{2})$.
Si verifica che i è un'isometria tra i due modelli.

1) ⟷ 3)



□

Alcune isometrie di $\mathbb{R}^n, S^n, \mathbb{H}^n$.

Prop.: le seguenti sono isometrie di $\mathbb{R}^n, S^n, \mathbb{H}^n = I^n$:
1) $f(x) = Ax + b$, $A \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{R}^n)$;
2) $f(x) = Ax$, $A \in O(n+1)$ (S^n);
3) $f(x) = Ax$, $A \in O^+(n,1) \overset{2}{\triangleleft} O(n,1)$ (I^n).
$O^+(n,1) = \{A \in O(n,1) \mid A_{11} > 0\}$ → conserva le cc

Dim.: 1) ok, 2) come 3) ma lo vedi. 3): ex.. □

Def.: un FRAME su (M,g) riemanniana è una base ortonormale in T_pM per un certo $p \in M$.

Oss.: le isometrie $M \to M$ agiscono sui frame.

Teo.: se M è connessa, l'azione è libera, cioè $f: M \to M$ t.c. $f(x) = x$ e $df_x = id \Rightarrow f\ id_M$. Dim.: poi. □

Ex.: le isometrie della prop. agiscono in modo transitivo sui frame.

Cor.: $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{Isom}(S^n)$, $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ sono quelli della prop..

Dim.: se ci fosse un'altra f, troverei $\bar{f} \in \mathrm{Isom}(\cdot)$ t.c. $f = \bar{f}$ al primo ordine in un pto $x \Rightarrow \bar{f}\circ f^{-1}$ fissa un frame $\Rightarrow$ è id. □

Ogni varietà riemanniana è spazio metrico

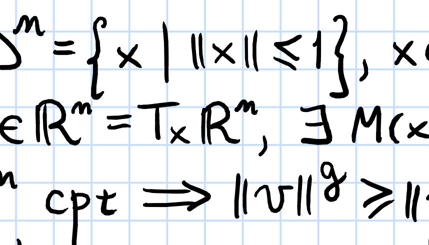
(M,g) riemanniana, $\gamma \rightsquigarrow L(\gamma)$.

Def.: $p, q \in M$ conn., $d(p,q) := \mathrm{INF}\{L(\gamma) : \gamma$ collega p e $q\}$.
($\gamma: [a,b] \to M$ (liscia) t.c. $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$)

Prop.: d è una distanza.

Dim.: 1) $d(p,q) = 0 \iff p = q$. 3) $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$.
2) $d(p,q) = d(q,p)$ (ovvia).

3):



, $\alpha * \beta$, riscalo α e β per fermarmi in q.

1): $(\Leftarrow)$ ovvio. $(\Rightarrow)$ Considero $\varphi: U(p) \to \mathbb{R}^n$ t.c. $q \notin U(p)$.
$D^n = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$, $x \in D^n$, $g(x) \rightsquigarrow g_{ij}$, $g^E(x) \rightsquigarrow \delta_{ij}$.
$v \in \mathbb{R}^n = T_x\mathbb{R}^n$, $\exists\, M(x) > m(x) > 0$ t.c. $\|v\|^E m(x) \leq \|v\|^g \leq M(x)\|v\|^E$.
D^n cpt $\Rightarrow \|v\|^g \geq \|v\|^E \cdot m$, $m > 0$. γ da p a q, $\exists$ "sottocurva" $\bar{\gamma}$ da p a un punto di ∂D^n,
$L(\gamma)^g \geq L(\bar{\gamma})^g = \int \|\bar{\gamma}'(t)\|^g dt \geq m \int \|\bar{\gamma}'(t)\|^E dt = m L(\bar{\gamma})^E \geq m$. □