Def.: sia M lorentziana. Si dice TIME-ORIENTABLE se $\exists$ una distinzione loc. coerente tra vettori di tipo tempo futuri e passati. Cosa si intende?
Se V è uno s.v. di segnatura $(m,1)$, ho due cc dei vettori di tipo tempo; una dico che è futura e una è passata. Loc. coerente vuol dire che $\forall p\in M\ \exists\, X\in\mathfrak{X}(U(p))$ mai nullo t.c. $X(q)\in T_qM$ è futuro $\forall q\in U(p)$.
Prop.: M var. ha struttura lorentziana t.-o. $\Leftrightarrow$ ha un campo mai nullo.
Cor.: S^{2m} non ha strutture lorentziane $\underbrace{\text{t.-o.}}_{\text{in realtà, quest'ipotesi non serve}}$ $\forall m$.

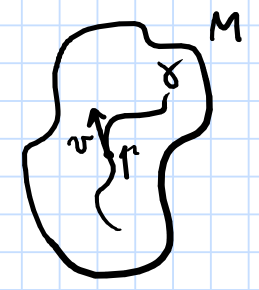
Dim. (della prop.): ($\Rightarrow$) $\forall p\in M\ \exists\, X_p\in\mathfrak{X}(U(p))$ mai nullo con $X_p(q)$ futuro $\forall q\in U(p)$. Prendiamo una partizione dell'unità e li incolliamo (i vettori futuri sono chiusi per combinazioni convesse).
($\Leftarrow$) Sia X il campo mai nullo e g metrica riemanniana, WLOG X è normalizzato secondo g. Sono due tensori, uno $(1,0)$ e l'altro $(0,2)$, li voglio combinare in un altro $(0,2)$. Magicamente: $h=C(X\otimes g\otimes g\otimes X)$ definito da $h(v,w)=g(v,X)\cdot g(w,X)$ (in carte: $h_{jl}=X^i g_{ij}g_{kl}X^k$).
Poniamo $\bar g=g-2h$, è lor. t.-o.. Dato p, completo $X(p)$ a una base ortonormale $X(p), v_2,\dots,v_m$. In questa base, $g_{ij}=\delta_{ij}$ e $X^i=\delta_{1i}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \bar g_{jl}=\delta_{jl}-2\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}_{jl}$ $\Rightarrow$ $\bar g=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, e X per il t.-o.. $\square$

Connessioni

Noi, in quanto amanti dell'analisi, vogliamo derivare.
Dati $X\in\mathfrak{X}(M)$ e $v\in T_pM$, come posso derivare X in direzione v?
Si potrebbe estendere v a $Y\in\mathfrak{X}(M)$ e calcolare $\mathcal{L}_YX=[Y,X]$, ma purtroppo dipende da Y.
Def.: una CONNESSIONE ∇ su M è un'operazione che assegna a ogni $(v,X)\in T_pM\times\mathfrak{X}(U(p))$ un vettore $\nabla_vX\in T_pM$ t.c.
1) è locale ($X\equiv Y$ in $V(p)\Rightarrow\nabla_vX=\nabla_vY$);
2) è $\mathbb{R}$-lineare, cioè $\nabla_v(\lambda X+\mu Y)=\lambda\nabla_vX+\mu\nabla_vY$ e $\nabla_{\lambda v+\mu w}X=\lambda\nabla_vX+\mu\nabla_wX$;
3) vale Leibnitz, cioè $\forall f\in C^\infty(V(p))$ $\nabla_v(fX)=\underbrace{\nabla_vf}_{=v(f)}X(p)+f(p)\nabla_vX$;
4) è liscia, cioè $\forall X,Y\in\mathfrak{X}(U(p))$ $\nabla_YX: q\mapsto\nabla_{Y(q)}X\in T_qM$ è un campo.

In carte, $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $v=v^je_j \rightsquigarrow \nabla_vX=v^j\nabla_{e_j}(X^i\frac{\partial}{\partial x^i})=$
$=\underbrace{v^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}e_j}_{\partial_vX}+v^jX^i\nabla_{e_j}\frac{\partial}{\partial x^i}$. Il termine $\nabla_{e_j}\frac{\partial}{\partial x^i}$ è un qualche vettore che scritto in base è $\Gamma^k_{ij}e_k$ con coefficienti Γ^k_{ij} detti SIMBOLI DI CHRISTOFFEL $\rightsquigarrow$ ho al più m^3 gradi di libertà e, assegnate Γ^k_{ij} lisce, $\nabla_vX=v^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}e_j+\underbrace{v^jX^i\Gamma^k_{ij}e_k}_{\text{termine correttivo, purtroppo non è un tensore}}$ definisce una connessione.

Oss.: il termine correttivo serve per togliere la dipendenza dalla carta.
Oss.:



$0\neq v\in T_pM$, $\gamma: I\to M$ embedding t.c. $\gamma(0)=p,\gamma'(0)=v$; $X\in\mathfrak{X}(M)$. Allora ∇_vX dipende solo da $X_{|\gamma}$.
Infatti, visto in carte, per il termine ∂_vX lo sappiamo già (è una derivata direzionale), mentre il termine correttivo ha dipendenza puntuale da p.
Def.: sia $\gamma: I\to M$ liscia. Un CAMPO SU γ è $X: I\to TM$ t.c. $X(t)\in T_{\gamma(t)}M\ \forall t\in I$.
Def.: sia γ regolare e X campo su γ. Allora poniamo DX il campo su γ definito nel modo seguente: γ è loc. un embedding $\rightsquigarrow X$ è definito su $\mathrm{Im}\,\gamma$, si estende a $\bar X\in\mathfrak{X}$, poniamo $DX(t):=\nabla_{\gamma'(t)}\bar X$ (stiamo supponendo l'esistenza di ∇, che vedremo più avanti).
In carte: dalla versione in carte di ∇, abbiamo $DX=\frac{dX}{dt}+(\gamma')^iX^j\Gamma^k_{ij}e_k$ (funziona anche per γ non regolare).
Def.: X è PARALLELO se $DX\equiv0$.
Prop.: siano $\gamma: I\to M$ regolare, $p=\gamma(t_0)$ e $v\in T_pM$. $\exists!$ campo parallelo X su γ che estende v.
Dim.: in carte, X parallelo che estende v $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{dX^k}{dt}=-(\gamma')^iX^j\Gamma^k_{ij}\\ X^k(t_0)=v^k\end{cases}$ sistema lineare di Cauchy $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ esistenza e unicità. $\square$
Def.: sia (M,∇) varietà con connessione e $\gamma:[a,b]\to M$ con $p=\gamma(a)$, $q=\gamma(b)$. Definisco $\Gamma^b_a(\gamma): T_{\gamma(a)}M\to T_{\gamma(b)}M$ t.c. $w=X(b)$ con X l'unico campo su γ parallelo che estende v. $v\mapsto w$
Questa mappa si dice TRASPORTO PARALLELO.
Prop.: è un iso. con inversa $\Gamma^a_b(\bar\gamma)$.
Dim.: per linearità del sistema di Cauchy. $\square$

Derivata covariante di campi tensoriali

Fissiamo (M,∇) e prendiamo $T\in\Gamma\mathcal{T}^k_h(M)$. Vorremo $\nabla_vT\in\mathcal{T}^k_hT_pM$.
Ma il trasporto parallelo ci identifica i tangenti: posso fare tutte le derivate che voglio; non entriamo nei dettagli.
Es.: ω 1-forma, $(\nabla_v\omega)_k=\frac{\partial\omega_k}{\partial v}-v^i\omega_j\Gamma^j_{ik}$;
g $(0,2)$, $(\nabla_vg)_{kl}=\frac{\partial g_{kl}}{\partial v}-v^ig_{kj}\Gamma^j_{il}-v^ig_{jl}\Gamma^j_{ik}$.