Torsione

(M,∇). **Def.**: la TORSIONE di ∇ è il campo tensoriale T di tipo $(1,2)$ definito così: $\forall p\in M\ \forall v,w\in T_pM \rightsquigarrow X,Y\in\mathfrak{X}(U(p))$ che estendono v e w, $T(p)(v,w)=\nabla_v Y-\nabla_w X-[X,Y](p)$.

Prop.: è ben def..

Dim.: in coordinate. $(\nabla_v Y)^i = v^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}+v^jY^l\Gamma^i_{jl} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (T(p)(v,w))^i = v^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}+v^jY^l\Gamma^i_{jl}-v^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}-v^jX^l\Gamma^i_{jl}+ -v^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} + v^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}=$$

$$=v^jw^l\Gamma^i_{jl}-w^jv^l\Gamma^i_{jl}=v^jw^l(\Gamma^i_{jl}-\Gamma^i_{lj}).\ \square$$

Oss.: $T^i_{jl}=\Gamma^i_{jl}-\Gamma^i_{lj}$.

Def.: ∇ é SIMMETRICA se $T\equiv 0$ (cioé $\Gamma^i_{jl}=\Gamma^i_{lj}$).

(M,∇,g). **Def.**: ∇ e g sono COMPATIBILI se il trasporto parallelo $\Gamma(\gamma)^t_{t_0}: T_{\gamma(t_0)}M \xrightarrow{\sim} T_{\gamma(t)}M$ è un'isometria $\forall\gamma, t_0, t$.

Teo.: data (M,g) pseudo-riemanniana $\exists!$ connessione ∇ simmetrica e compatibile con g, la CONNESSIONE DI LEVI-CIVITA.
In carte: $\Gamma^k_{ij}\overset{\star}{=}\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$.

Prop.: ∇ e g sono compatibili $\Leftrightarrow \nabla g=0$.

Dim. (della prop.): $\nabla g=0 \Leftrightarrow \nabla_v g=0\ \forall v\in T_pM\ \forall p\in M$.
∇ e g compatibili $\Leftrightarrow$ il trasporto parallelo è un'isometria, cioè "g non cambia lungo ogni curva $\Rightarrow \nabla_v g=0$". $\square$

Oss.: $\nabla g=0 \Leftrightarrow 0\overset{\circledast}{=}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-\Gamma^l_{ki}g_{lj}-\Gamma^l_{kj}g_{li}$.

Dim. (del teo.): 1) in carte, se $\exists$ è unica e Γ^k_{ij} é dato da $\star$.
Basta prendere $\circledast$, ciclarla, fare un'opportuna combinazione lineare e si trova $2\Gamma^k_{ij}g_{kl}=\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$.

2) Esistenza. In una carta, la definisco con ∇, verifico che è simmetrica e compatibile; unicità $\Rightarrow$ non dipende dalla carta. $\square$

Perché simmetrica? 1) È una scelta canonica che dà l'unicità;
2) si comporta bene con le sottovarietà;
3) relatività generale.

Oss.: $\varphi: M\xrightarrow{\sim}N$ diffeo., ∇ su $M \rightsquigarrow \varphi_*\nabla$ su N.
La torsione commuta con il push-forward.

Cor.: $(M,g)\xrightarrow[\varphi]{\sim}(N,h)$ isometria $\Rightarrow \nabla^{LC}_M \overset{\varphi_*}{\longmapsto} \nabla^{LC}_N$.

Sottovarietà

Oss.: $\mathbb{R}^n$ euclideo o $\mathbb{R}^{p,q}$, $\eta_{p,q}=\begin{pmatrix}-I_q & 0\\ 0 & I_p\end{pmatrix}$; $\Gamma^{k\,LC}_{ij}\equiv 0 \Rightarrow \nabla_v=\partial_v$.

(N,g) pseudo-riemanniana, $M\subseteq N$ sottovar. pseudo-riemanniana.
senza bordo

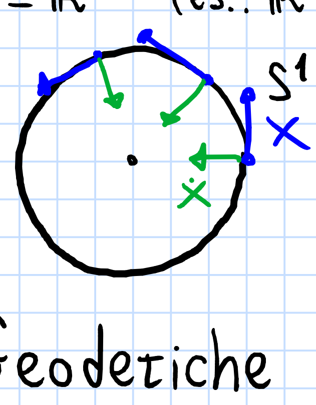
Prop.: $p\in M$, $v\in T_pM$, $X\in\mathfrak{X}(\underset{\text{in } M}{U(p)})$. Estendo X in N vicino a p.
$\pi: T_pN\to T_pM$ proiezione ortogonale, $\nabla^M_v X=\pi(\nabla^N_v X)$.

Dim.: in carte, $N=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k$, $p=0$, $M=\mathbb{R}^n\times\{0\}$.
A meno di isomorfismi lineari, $g_{ij}(0)$ diagonale $\Rightarrow g^{ij}(0)$ diagonale;
$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)\Rightarrow$
$\Rightarrow$ i simboli di Christoffel di M in $p=0$ sono quelli di N con $1\le i,j,k\le n$.
$(\nabla_v X)^i=v^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}+v^jX^l\Gamma^i_{jl}\Rightarrow \nabla^M_v X=\pi(\nabla^N_v X)$. $\square$

Cor.: $\gamma: I\to N\subseteq M$, $X: I\to TN$ campo su γ in N lo posso vedere come campo su γ in M; $D^N_t X=\pi\circ D^M_t X$.

Cor.: X è parallelo per $N \Leftrightarrow D^M_t X\in(T_{\gamma(t)}N)^\perp$.

Cor.: $N\subseteq\mathbb{R}^{p,q}$ (es.: $\mathbb{R}^n$ euclideo), X parallelo per $N\Leftrightarrow \dot X\in(T_{\gamma(t)}N)^\perp$.

Es.: 

S^1 X è parallelo in S^1.

Geodetiche

(M,∇). **Def.**: una GEODETICA è $\gamma: I\to M$ t.c. $\dot\gamma(t)$ é parallelo.

Oss.: γ geodetica
- è costante: $\dot\gamma(t)=0\ \forall t$
- è immersione: $\dot\gamma(t)\neq 0\ \forall t$.

In generale: un campo parallelo
- è banale: $X\equiv 0$
- mai nullo: $X(t)\neq 0\ \forall t$.

In carte: $\gamma: I\to\mathbb{R}^n$, $X: I\to\mathbb{R}^n$, $D_tX=\frac{dX}{dt}+\dot\gamma(t)X^j\Gamma^k_{ij}e_k$.
Qui: $X=\dot\gamma(t)$, $\gamma(t)=x(t)$. γ geodetica $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0=\ddot x+\dot x^i\dot x^j\Gamma^k_{ij}e_k$.

Oss.: $\gamma(t)$ geodetica $\Rightarrow \eta(t)=\gamma(ct+d)$ geodetica.

Teo.: (M,∇), $p\in M$, $v\in T_pM$. $\exists!$ geodetica massimale $\gamma_v: I_v\to M$ t.c. $0\in I_v$, $\gamma_v(0)=p$, $\dot\gamma_v(0)=v$.

Dim.: in carte, $\ddot x^k=-\dot x^i\dot x^j\Gamma^k_{ij}$ è un sistema di equazioni differenziali al 2° ordine, $x(0)=p$, $\dot x(0)=v$, Cauchy $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ sol. locale. $\square$

Es.: $\mathbb{R}^{p,q}\Rightarrow\Gamma^k_{ij}\equiv 0\Rightarrow$ le geodetiche sono le rette.
In generale: $N\subseteq\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{p,q}$ sottovarietà pseudo-riemanniana,
$\gamma: I\to N$ geodetica $\Leftrightarrow \ddot\gamma(t)\in(T_{\gamma(t)}N)^\perp\ \forall t\in I$.

Oss.: $\gamma: I\to M$ geodetica $\underset{g \text{ e } \nabla \text{ compatibili}}{\Rightarrow}$ $\langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle$ costante $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ è di tipo tempo, spazio o luce e $\|\dot\gamma(t)\|=\sqrt{|\langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle|}$ costante.

A meno di riparametrizzare $t\mapsto ct$, posso supporre (se è spazio o tempo) $\|\dot\gamma(t)\|\equiv 1$.

Es.: $S^n\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$, $\gamma_v(0)=p$, $\dot\gamma_v(0)=v$, $\|v\|=1 \overset{\text{ex.}}{\Rightarrow} \gamma_v(t)=p\cos t+v\sin t$.

Analogamente: $I^n\subseteq\mathbb{R}^{n,1}$. Ex.: $p\in I^n$, $T_pI^n=p^\perp\ni v$, $\|v\|=1$,
$\gamma_v(t)=p\cosh(t)+v\sinh(t)$.