Mappa esponenziale

(M,g) pseudo-riemanniana, $p \in M$, $V_p = \{ v \in T_pM \mid 1 \in \overset{\uparrow}{I_v} \}$. (dominio della geodetica massimale)

Def.: la MAPPA ESPONENZIALE è $\exp_p : V_p \to M$, $v \mapsto \gamma_v(1)$.

Proprietà di $\exp_p$:

1) V_p è aperto e $\exp_p$ è liscia (analisi);
2) V_p è stellato nell'origine;
3) $\exp_p$ manda rette euclidee passanti per l'origine percorse a velocità costante in geodetiche;
4) $d(\exp_p)_0 : T_pM \to T_pM$ è l'identità $\Rightarrow$ $\Rightarrow \exp_p$ è diffeo. loc. in 0.

Es.: per S^n, $\exp_p|_{B(0,r)} : B(0,r) \xrightarrow{\sim} B(p,r)$ diffeo. $\forall r < \pi$.
(sto usando la metrica, g def. pos.)

5) $\exp_p(B(0,r)) \subseteq B(p,r)$.

Def.: se $r>0$ è abbastanza piccolo t.c. $\exp_p|_{B(0,r)} : B(0,r) \to \exp_p(B(0,r))$ è diffeo., l'immagine $\exp_p(B(0,r))$ è detta PALLA GEODETICA.

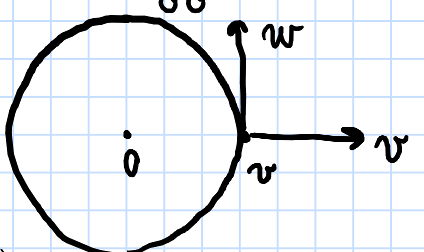
Fissiamo $v_1, \dots, v_n$ base ortonormale per $T_pM \rightsquigarrow T_pM \cong \mathbb{R}^n \supseteq$ $\supseteq B(0,r) \to$ palla geodetica, dà le COORDINATE NORMALI (uniche a meno di agire con $O(n)$).

Prop.: in coordinate normali, 1) $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ (perché $d(\exp_p)_0 = id$), ma in generale $g_{ij}(x) \neq \delta_{ij}$ se $x \neq 0$;
2) le geodetiche passanti per 0 sono quelle euclidee $t \mapsto t \cdot v$;
3) $\Gamma^k_{ij}(0) = 0$ e $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) = 0$.

Dim. (solo di $2) \Rightarrow 3)$): $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{li}$, $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$,
$\ddot{x}^k + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma^k_{ij} = 0$, $x(t) = tv \Rightarrow 0 = 0 + v^i v^j \Gamma^k_{ij}(0) = 0 \ \forall v \Rightarrow 3)$. $\square$

Lemma di Gauss: in coordinate normali, le sfere sono ortogonali ai raggi.

Dim.: $v \in T_pM$, $\langle w, v \rangle = 0$, $\|v\| = \|w\| = r$, sfera di raggio r.
Mi restringo a $W = \operatorname{Span}\{v, w\}$:



Vogliamo: $\langle v, w \rangle_g = 0$.
$v \rightsquigarrow X$, $w \rightsquigarrow Y$ che commutano:
X radiale di norma r (non si estende in 0),
Y ortogonale a X e opportunamente riscalato.

Mostriamo $\langle X, Y \rangle = 0$: ci basta $\frac{\partial}{\partial r} \langle X, Y \rangle = 0$ (perché $\|Y\| \to 0$).

$$\frac{\partial}{\partial r} \langle X, Y \rangle = \langle D_r X, Y \rangle + \langle X, D_r Y \rangle =$$
$$= \langle \underbrace{\nabla_X X}_{\substack{\| \to \text{ i raggi sono geodetiche} \\ 0}}, Y \rangle + \langle X, \nabla_X Y \rangle =$$
$$= \langle X, \nabla_X Y \rangle \underset{[X,Y]=0 \Rightarrow \nabla_X Y = \nabla_Y X}{=} \langle X, \nabla_Y X \rangle =$$
$$= \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} \underbrace{\langle X, X \rangle}_{\text{costante}} = 0. \ \square$$

Conseguenze:

Def.: (M,g) riemanniana, γ geodetica che collega p e q è MINIMIZZANTE se $L(\gamma) = d(p,q)$.

Prop.: $p \in M$, $p \in B$ palla geodetica; $\forall q \in B$ la geodetica radiale $\gamma_{p,q}$ è l'unica geodetica minimizzante che collega p e q.

Dim.: $r' = L(\gamma)$, η curva da p a q, vogliamo $L(\eta) \geq L(\gamma)$.
WLOG considero il tratto di η che arriva fino alla circonferenza di raggio r'. Ci basta: $\|\dot{\eta}(t)\|_g \underset{\text{lemma di Gauss}}{\geq} \|\dot{\eta}(t)^{rad}\|_g \Rightarrow$
$\Rightarrow L(\eta) \geq \int \|\dot{\eta}(t)^{rad}\|_g \geq r'$, e vale l'uguaglianza solo se η è riparametrizzazione di γ. $\square$