Cor.: se $r>0$ è t.c. $exp_p|_{B(0,r)}$ è embedding, $exp_p(B(0,r)) = B(p,r)$.

Def.: (M,g) riemanniana, $U \subseteq M$ aperto è TOTALMENTE NORMALE se $\forall p \in U\ \exists B$ geodetica centrata in p e contenente U.

Fatto: gli aperti totalmente normali ricoprono M.

Teo.: le geodetiche sono esattamente le curve localmente minimizzanti percorse a velocità costante.

Dim.: $(\Rightarrow)$ γ geodetica, $\forall t_0\ \exists$ intorno di $\gamma(t_0)$ totalmente normale U, allora dati t_1, t_2 t.c. $\gamma(t_1), \gamma(t_2) \in U$, il pezzo di γ che li congiunge è minimizzante.

$(\Leftarrow)$ γ loc. minimizzante $\Rightarrow$ loc. minimizzante in un intorno totalmente normale $\Rightarrow$ geodetica. $\square$

Completezza

(M,g) riemanniana $\Rightarrow$ s.m..

Def.: M è GEODETICAMENTE COMPLETO se le geodetiche esistono tutte $\forall t \in \mathbb{R}$.

Prop.: se M è geod. completa è connessa, $\forall p, q\ \exists$ geodetica minimizzante che li collega.

Dim.: S sfera geod. centrata in p, $\begin{matrix} S \to \mathbb{R} \\ x \mapsto d(x,q) \end{matrix}$, x_0 t.c. è minimo, considero la geodetica $\underset{\hookrightarrow \text{a velocità } 1}{\gamma}$ che va da p in x_0.

Ex.: $d = d(p,q) \Rightarrow \gamma(d) = q$.

Hint: considera $J \subseteq [0,d]$, $J = \{ t \mid d(\gamma(t),q) = d - t \} \ni 0$, si mostra che è clopen. $\square$

Cor.: M geod. completa e connessa $\Rightarrow exp_p : T_pM \to M$ è suri. e $\forall r>0\ \ exp_p(B(0,r)) = B(p,r)$.

Teo. (Hopf-Rinow): sono equivalenti:

1) M completa;
2) $K \subseteq M$ cpt $\Leftrightarrow$ chiuso lim.;
3) M geod. completa.

Dim.: $3) \Rightarrow 2)$: cpt $\Rightarrow$ chiuso lim. ok. K chiuso lim.:
$p \in M$ qualsiasi, $exp_p : T_pM \to M$ suri., $\exists\ r$ t.c.
$exp_p(B(0,r)) = B(p,r) \underset{\hookrightarrow K \text{ lim.}}{\supseteq K} \Rightarrow$
$\Rightarrow exp_p(\overline{B(0,r)}) \supseteq K \Rightarrow K$ chiuso in cpt $\Rightarrow$ cpt.

$2) \Rightarrow 1)$ Standard per s.m..

$1) \Rightarrow 3)$ PA M non è geod. completa $\Rightarrow \exists\ \gamma : (a,b) \to M$ geod. massimale, $b < +\infty$. γ geod. $\Rightarrow$ lipschitziana (velocità costante) $\Rightarrow \{t_n\}$ di Cauchy, $t_n \in (a,b)$, $t_n \to b \Rightarrow$
$\Rightarrow \{\gamma(t_n)\}$ di Cauchy $\Rightarrow \exists\ \bar{x}$ limite.

In carte: $x(t_n)$ converge, $\|\dot{x}(t_n)\|$ lim. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ si estende. $\square$

Cor.: M cpt $\Rightarrow$ geod. completa.
$S \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso $\Rightarrow$ geod. completo.

Cor.: ogni varietà ha una metrica riemanniana geod. completa.

Dim.: Whitney $\Rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^N$ chiuso. $\square$

Curvatura

(M, ∇). Def.: il TENSORE DI RIEMANN di ∇ $R \in \Gamma\, \mathcal{T}^3_1(M)$,

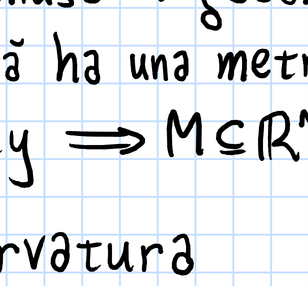
$$R(p)(\underbrace{u}_{X}, \underbrace{v}_{Y}, \underbrace{w}_{Z}) = \nabla_u \nabla_Y Z - \nabla_v \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y](p)} Z.$$

Non dipende dalle estensioni scelte.

Oss.: su $\mathbb{R}^n$ euclideo, $R \equiv 0$.

Teo.: (M,g) è loc. isometrica a $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow R \equiv 0$ (PIATTA). Dim.: no. $\square$

$p \in M$, $R(p)(u,v,w) = z$, estendo u e v a campi che commutano,



trasporto w lungo il "rettangolino", trovo $w' = w + t^2 z + o(t^2)$.

In coordinate $R_{ijk}{}^{l}$ è antisimmetrico in i e j (ci sono anche altre simmetrie).

Tensore di Ricci: $(1,3) \rightsquigarrow (0,2)$, $R_{ij} = R_{lij}{}^{l}$. ↳ è simmetrico

È importante per l'equazione di campo di Einstein: (M,g) 4-varietà lorentziana,

"$\underset{\text{curvatura}}{R_{ij}}$" $= \underset{\text{tensore energia-impulso}}{T_{ij}}$.

Se abbiamo g, $R_{ij} \rightsquigarrow R^i{}_j \rightsquigarrow R^i{}_i = R$ CURVATURA SCALARE, nel caso di superfici in $\mathbb{R}^3$ è, a meno di costanti, la curvatura gaussiana.

In dim. 2, si può fare $R \rightsquigarrow$ Ricci $\rightsquigarrow$ Riemann;
" " 3, " " " Ricci $\rightsquigarrow$ Riemann.