Def.: dati $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ di prob., $(E,\mathcal{E})$ mis., T insieme, un processo stocastico è una famiglia $(X_t)_{t\in T}:\Omega \xrightarrow{mis.} E$ di v.a. indicizzate da T.

Oss.: un processo stocastico si può identificare con una v.a. a valori in $(E^T,\mathcal{E}^T)$.
$\mathcal{E}^T$ è la σ-algebra generata dagli insiemi cilindrici $\{A_{t_1}\times\dots\times A_{t_k} \mid t_1,\dots,t_k\in T,\ A_{t_i}\in\mathcal{E}\}$.

Moto Browniano (intro.)

Processo stocastico in cui $T=[0,\bar t]$ a valori in $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^d$) e:
- le traiettorie $t\mapsto X_t(\omega)$, a ω fissato, sono cont.;
- gli incrementi X_t-X_s, $t>s$ su intervalli disgiunti sono indipendenti;
- X_t v.a. gaussiana $\forall t$.

Teo.: data μ mis. su $(\mathbb{R},\underset{\text{boreliani}}{\mathcal{B}})$ di prob., $\exists$ uno spazio di prob. $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ e v.a. $X_1,X_2,\dots,X_n,\dots:\Omega\to\mathbb{R}$ indi. con legge $\mu=(X_n)_\#\mathbb{P}$ (Ionescu-Tulcea).

Dim.: no. □

Spazi di Hilbert gaussiani

Sia H spazio di Hilbert separabile, sia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base ortonormale completa.

Lemma: $\exists$ uno spazio di prob. $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ e un proc. stoc. $(X_h)_{h\in H}$ ($X_h=X(h)$) t.c.:

1) per quasi ogni ($\tilde\forall$) $\omega\in\Omega$ $H\ni h\mapsto X(h)(\omega)\in\mathbb{R}$ è lineare;
2) $\forall h\in H$ $X(h)\sim N(0,\|h\|_H^2)$.

Dim.: grazie al teo. sia $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ t.c. $\exists\, a_1,a_2,\dots:\Omega\to\mathbb{R}$ v.a. $N(0,1)$ indi., e poniamo $X(h)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\langle h,e_n\rangle$, questa converge in $L^2(\mathbb{P})$ e q.c. ($\mathbb{E}[a_n\langle h,e_n\rangle]=0$, $\mathrm{Var}(a_n\langle h,e_n\rangle)=\langle h,e_n\rangle^2$). □

Def.: se $(A,\mathcal{A},\mu)$ è di misura σ-finito, $H=L^2(A,\mathcal{A},\mu)$, chiamiamo l'X costruito dal lemma la misura gaussiana di intensità μ.
Se $A=\mathbb{R}^d$, $\mathcal{A}=\mathcal{B}$, $\mu=dx$, X è detto white noise su $\mathbb{R}^d$.

Oss.: sia $C\subseteq A$ con $\mu(C)<+\infty$, scrivendo $X(\mathbb{1}_C)=X(C)$. Se $C_1,C_2,\dots$ sono mis., disgiunti, $\mu(C_i),\mu(\bigcup C_i)<+\infty$, $X(\bigcup_{m=0}^{+\infty}C_m)=\sum_{m=0}^{+\infty}X(C_m)$ q.c.* e inoltre se $C_1,C_2\subseteq A$ con $\mu(C_1),\mu(C_2)<+\infty$, $\mathbb{E}[X(C_1)X(C_2)]=\mu(C_1\cap C_2)$ (perché $\mathbb{E}[X(h)X(g)]=\mathbb{E}[\sum_{n,m}a_na_m\langle h,e_m\rangle\langle g,e_n\rangle]=\langle h,g\rangle_{L^2}$).

⚠ *: il q.c. dipende dai C_m (invece vorremmo il $\tilde\forall$ davanti).

Ex.: considerare uno spazio A, $C_1,C_2,\dots\subseteq A$ mis. con $\mu(C_n)=c_n^2>0$, $\sum c_n^2<+\infty$, $\sum c_n=+\infty$. Mostrare che $\sum_{m=1}^{+\infty}|X(C_m)|=+\infty$ q.c., di conseguenza X non si identifica con una v.a. a valori in $\mathcal{M}(A,\mathcal{A})$.

Oss.: la mappa $X:h\mapsto X(h)\in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ è un isomorfismo (di spazi di Hilbert) con un sottospazio di $L^2(\mathbb{P})$ che è detto essere uno spazio di Hilbert gaussiano.

Consideriamo $H=L^2([0,+\infty),dx)$ e definiamo $B_t=X([0,t])$.
$\mathbb{E}(B_t)=0$, $\mathrm{Var}(B_t)=t$. Se $s_1<t_1\le s_2<t_2$, allora $B_{t_1}-B_{s_1}=X([s_1,t_1])$, $B_{t_2}-B_{s_2}=X([s_2,t_2])$ sono indi. perché $\langle \mathbb{1}_{[s_1,t_1]},\mathbb{1}_{[s_2,t_2]}\rangle=0$.
$(B_t)_{t\in(0,+\infty)}$ è un proc. stoc. a valori in $\mathbb{R}$, ed è gaussiano.

Def.: un proc. stoc. $(Y_t)_{t\in I\subseteq\mathbb{R}}$ a valori in $\mathbb{R}$ è gaussiano se le leggi marginali (le leggi di $(Y_{t_1},\dots,Y_{t_n})$, $t_1,\dots,t_n\in I$) sono gaussiane.

$s<t$, $\mathbb{E}[B_tB_s]=\mathbb{E}[(B_t-B_s+B_s)B_s]=\mathbb{E}[B_s^2]+\mathbb{E}[(B_t-B_s)(B_s-B_0)]=$
$=s=s\wedge t$.

Continuità di proc. stoc.

Def.: se (E,τ) è s.t., $\mathcal{B}$ boreliani, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\to E$ proc. stoc. è q.c. continuo se $\tilde\forall\omega\in\Omega$ $\mathbb{R}\ni t\mapsto X_t(\omega)\in E$ è cont. (quindi X si identifica con una v.a. $X:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\to C(E)$).

In generale: non è chiaro se $\{\omega\mid t\overset{cont.}{\mapsto}X_t(\omega)\}\subseteq\Omega$ è mis..
Anche se X_t è q.c. cont., non è chiaro se $\inf\{t\mid |X_t|>c\}$, $\sup_{s\in[0,t]}X_s$ sono mis..

$\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_n}$ sono prob. su $\mathbb{R}$

Dato $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ a valori in E s.t., $\mathcal{M}_X=\{\overbrace{(X_{t_1},\dots,X_{t_n})_\#\mathbb{P}}^{\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_n}}\mid t_1,\dots,t_n\in\mathbb{R}\}$.

Def.: siano $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\to E$, $(X'_t)_{t\in\mathbb{R}}:(\Omega',\mathcal{F}',\mathbb{P}')\to E$ proc. stoc.. Si dicono versioni l'uno dell'altro se $\mathcal{M}_X=\mathcal{M}_{X'}$, ovvero $\forall t_1,\dots,t_n\in\mathbb{R}$ $\mathbb{P}_{t_1,\dots,t_n}=\mathbb{P}'_{t_1,\dots,t_n}$.
Se $(X_t)_{t\in\mathbb{R}},(X'_t)_{t\in\mathbb{R}}:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\to E$, si dicono uno modificazione dell'altro se $\forall t\in\mathbb{R}\ \tilde\forall\omega\in\Omega$ $X_t(\omega)=X'_t(\omega)$ e si dicono indistinguibili se $\tilde\forall\omega\in\Omega\ \forall t\in\mathbb{R}$ $X_t(\omega)=X'_t(\omega)$.

Oss.: modificazione $\Rightarrow$ versione;
modificazione + q.c. cont. $\Rightarrow$ indistinguibili (ex.).

Teo. (continuità di Kolmogorov): se $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}:(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\to\mathbb{R}$ è un proc. stoc. t.c. $\exists\,\alpha,\beta,C>0$ $\mathbb{E}[|X_t-X_s|^\alpha]\le C|t-s|^{1+\beta}$ allora X ha una modificazione q.c. cont..

Tornando a B_t: $\mathbb{E}[|\underbrace{B_t-B_s}_{N(0,|t-s|)}|^4]=3|t-s|^2$, quindi possiamo passare a una versione $\tilde B_t$ q.c. cont., che continua a essere un processo gaussiano, a incrementi indi. (ex.) e $\mathbb{E}[\tilde B_t]=0$, $\mathbb{E}[\tilde B_t\tilde B_s]=t\wedge s$.
D'ora in poi diciamo che B_t è il moto browniano standard se viene da questa costruzione.

Proprietà del moto browniano (ex.): se B_t è il m.b. std.:
1) $\forall s>0$ $Y_t=B_{t+s}-B_s$, $t\ge 0$ è un moto brown.;
2) $-B_t$ è un moto brown.;
3) $\forall c>0$ cB_{t/c^2}, $t\ge0$ è un m.b. (invariante di scala 1-2);
4) $Y_0=0$, $Y_t=tB_{1/t}$ $t>0$ è un m.b. (hint: $\mathbb{P}(\lim_{t\to0}tB_{1/t}=0)=1$).