Funzioni di variazione finita

$A:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $t\in[0,+\infty)$, $\Delta=\{0=t_0<t_1<\ldots<t_m=t\}$.

Ampiezza: $|\Delta|=\max_{i=1,\ldots,m}|t_i-t_{i-1}|$.

Def.: $S_t^\Delta=\sum_{i=1}^m |A_{t_i}-A_{t_{i-1}}|$.

Def.: la variazione di A su $[0,t]$ è $S_t=\sup_\Delta S_t^\Delta$.
A è a variazione finita se $S_t<+\infty\ \forall t$.
A ″ ″ ″ limitata se $\exists M$ t.c. $S_t\le M\ \forall t$.

Limitiamoci a A continua a dx.

Oss.:
- se $\Delta\supseteq\Delta'$ partizioni di $[0,t]$, $S_t^\Delta\ge S_t^{\Delta'}$;
- se $t'\ge t$, $S_{t'}\ge S_t$;
- se A è crescente, $S_t=S_t^\Delta=A_t-A_0\ \forall t\,\forall\Delta$.

Prop.: se A è a variazione finita, allora $A_t=I_t-D_t$ dove I,D sono crescenti e continue a dx.

Dim.: $I_t=\dfrac{S_t+A_t}{2}$, $D_t=\dfrac{S_t-A_t}{2}$. □

Se $F:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ è crescente e continua a dx, allora $\exists\mu$ misura di Borel t.c. $\mu((-\infty,t])=F(t)\ \forall t$.

Data A a var. finita associamo ad essa due misure μ^+,μ^- corrispondenti a I e D e poniamo $\int_0^{+\infty} f_s\,dA_s:=\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu^+-\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu^-$.

Oss.: se $f\in C([0,t])$ e A continua allora
$$\int_0^t f_s\,dA_s=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=0}^m f_{t_i}(A_{t_{i+1}}-A_{t_i})\ \text{(Riemann-Stieltjes)}.$$

Ex.: se $A\in C^1([0,+\infty))$ allora è a var. finita e $\int_0^{+\infty} f\,dA=\int_0^{+\infty} f(s)\dfrac{dA}{ds}(s)\,ds$. (f buona, volendo)

Dati $X:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $t\in[0,+\infty)$ e Δ partizione di $[0,t]$ poniamo $T_t^\Delta=\sum_{i=1}^m |X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|^2$.

Def.: dato un processo stocastico $(X_t)_{t\ge0}$ a valori reali, si dice che ha <u>variazione quadratica finita</u> se $\exists$ un processo $(\langle X,X\rangle_t)_{t\ge0}$ t.c. $\langle X,X\rangle_t<+\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. $\forall t$, $\lim_{m\to+\infty} T_t^{\Delta_m}=\langle X,X\rangle_t$ in prob. $\forall t\ge0$ e $(\Delta_m)_m$ è una qualsiasi sequenza di partizioni di $[0,t]$ con $|\Delta_m|\to0$ per $m\to+\infty$.

Oss.: X a var. quad. finita $\not\Rightarrow \sup_\Delta T_t^\Delta<+\infty$ $\mathbb{P}$-q.c..

Teo.: se $(B_t)_{t\ge0}$ è BM allora $\langle B,B\rangle_t=t\ \forall t$.
Più in generale, se X è misura gaussiana con intensità μ e F è t.c. $\mu(F)<+\infty$ e $\{F_k^m\}_k$ partizione di F con $\lim_{m\to+\infty}\sup_k\mu(F_k^m)=0$, allora $\lim_{m\to+\infty}\sum_k (X(F_k^m))^2=\mu(F)$ in prob. e in L^2.

Dim.: BM è una misura gaussiana con $\mu(A)=|A|$, $A\subseteq[0,+\infty)$, $B_t=X([0,t])$, $T_t^\Delta=\sum_{i=0}^{m-1}|X((t_i,t_{i+1}])|^2$, $F_i^m=(t_i,t_{i+1}]$ partizione di $F=(0,t]$.
Vogliamo: $\sum_k(|X(F_k^m)|^2-\mu(F_k^m))\to0$ in L^2.
$X(F_k^m)\sim N(0,\mu(F_k^m))$, $(X(F_k^m))_k$ sono indi..
$$*=\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_k\big(|X(F_k^m)|^2-\mu(F_k^m)\big)\Big)^2\Big]=\sum_k\mathbb{E}\big[\,\big||X(F_k^m)|^2-\mu(F_k^m)\big|^2\big].$$
$$\mathbb{E}\big[\,\big||X(A)|^2-\mu(A)\big|^2\big]=\mathrm{Var}(|X(A)|^2)=\mu(A)^2\,\mathrm{Var}\Big(\Big|\frac{X(A)}{\sqrt{\mu(A)}}\Big|^2\Big)=$$
$$=\mathrm{Var}(Z^2)\mu(A)^2\underset{Z\sim N(0,1)}{=}2\mu(A)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow *=2\sum_k(\mu(F_k^m))^2\le2\Big(\underbrace{\max_k\mu(F_k^m)}_{\xrightarrow{m\to+\infty}0}\Big)\mu(F).\ \square$$

Cor.: 1) le traiettorie del BM non sono $\mathbb{P}$-q.c. a var. finita $\forall t>0$;
2) ″ ″ ″ ″ ″ ″ ″ α-Hölder cont. per $\alpha>1/2$.

Dim.: 1) supponiamo che $\omega\in\Omega$ sia t.c. $S_t<+\infty$. Allora $\forall\Delta$ partizione di $[0,t]$, $T_t^\Delta=\sum_{i=0}^{m-1}|B_{t_{i+1}}-B_{t_i}|^2\le\Big(\sup_{i=0,\ldots,m-1}|B_{t_{i+1}}-B_{t_i}|\Big)\sum_{i=0}^{m-1}|B_{t_{i+1}}-B_{t_i}|$.
Siano Δ_m t.c. $|\Delta_m|\to0$, allora
$$0<t=\lim_{m\to+\infty}T_t^{\Delta_m}\le\liminf_{m\to+\infty}\Big(\sup_{i=0,\ldots,m-1}|B_{t_{i+1}}-B_{t_i}|\,S_t^{\Delta_m}\Big)\le$$
$$\le S_t\liminf_{m\to+\infty}\sup_{i=0,\ldots,m-1}|B_{t_{i+1}}-B_{t_i}|\le0,\ \text{assurdo.}$$
2) $$T_t^\Delta=\sum_{i=0}^{m-1}|B_{t_{i+1}}-B_{t_i}|^2\le[B]_{C^\alpha}\sum_{i=0}^{m-1}|t_{i+1}-t_i|^{2\alpha}\le$$
$$\le[B]_{C^\alpha}\Big(\sup_{i=0,\ldots,m-1}|t_{i+1}-t_i|^{2\alpha-1}\Big)\cdot t.\ \square$$

Notazione: $Y_t:\begin{array}{l}E^T\to E\\ (x_t)_{t\in T}\mapsto x_t\end{array}$ $\forall t\in T$. $S\subseteq T$, $Y_S:\begin{array}{l}E^T\to E^S\\ (x_t)_{t\in T}\mapsto(x_t)_{t\in S}\end{array}$.
Se $(E,\mathcal{E})$ mis., la σ-algebra prodotto $\mathcal{E}^{\otimes T}$ è generata dalle Y_t (equivalentemente, è generata dai cilindri).

Dato un processo $(X_t)_{t\in T}$ definito su $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ a valori in $(E,\mathcal{E})$, la sua versione canonica è il processo $(Y_t)_{t\in T}$ su $(E^T,\mathcal{E}^{\otimes T},\mu)$ dove μ = legge di X.

Problema: assegnate delle misure $\{\mu_S\mid S\subseteq T,\ S\text{ finito},\ \mu_S\text{ misura su }\mathcal{E}^{\otimes S}\}$, esiste una misura μ su $\mathcal{E}^{\otimes T}$ t.c. μ_S sia la legge di Y_S rispetto a μ $\forall S\subseteq T$ finito?

Oss.: la famiglia $\{\mu_S\}$ deve essere proiettiva: se $S'\subseteq S$, $\mu_{S'}(A)=\mu_S(Y_{S'}\in A)\ \forall A\in\mathcal{E}^{\otimes S'}$, cioè $\mu_{S'}$ legge di $Y_{S'}$ rispetto a μ_S.

Oss.: se esiste μ, allora sarà unica.

Teo. (estensione di Kolmogorov): sia $\{\mu_S\}_{S\subseteq T\text{ finito}}$ una famiglia proiettiva di prob. $\mu_S:\mathcal{E}^{\otimes S}\to[0,1]$. Allora $\exists!$ prob. $\mu:\mathcal{E}^{\otimes T}\to[0,1]$ t.c. $\mu_S(A)=\mu(Y_S\in A)\ \forall S\subseteq T$ finito $\forall A\in\mathcal{E}^{\otimes S}$.

Altri spazi "canonici". La σ-algebra $\mathcal{E}^{\otimes T}$ non contiene insiemi "interessanti" quando T è più che numerabile.

Supponiamo che E sia metrico, cpt e separabile (polacco), allora se $(X_t)_{t\ge0}$ è a valori in E a traiettorie cont. possiamo pensarlo come v.a. a valori in $C([0,+\infty);E)$ munito della σ-algebra di Borel, oppure munito della traccia della σ-algebra $\mathcal{E}^{\otimes T}$ (A è mis. se $\exists\tilde{A}\in\mathcal{E}^{\otimes T}$ t.c. $A=\tilde{A}\cap\underbrace{C([0,+\infty);E)}_{\notin\,\mathcal{E}^{\otimes T}}$).

È ben def. la legge μ di $(X_t)_{t\ge0}$ ponendo $\mu(A)=\mathbb{P}(X\in\tilde{A})$.

Def.: la legge μ del moto browniano visto come processo a valori in $C([0,+\infty);\mathbb{R})$ è detta <u>misura di Wiener</u>.
Lo spazio $(C([0,+\infty);\mathbb{R}),\mathcal{B}(C([0,+\infty);\mathbb{R})),\mu)$ è detto spazio di Wiener.

Def.: sia $T=[0,+\infty)$, l'operatore di shift θ_t, $t\ge0$ è $\theta_t:\begin{array}{l}E^{[0,+\infty)}\to E^{[0,+\infty)}\\ (x_s)_{s\ge0}\mapsto(x_{s+t})_{s\ge0}\end{array}$. Si può anche restringere a $C([0,+\infty);E)$.
Un processo $(X_t)_{t\ge0}$ è stazionario se la sua legge non cambia con l'azione di $\theta_t\ \forall t$.

Def.: $(X_t)_{t\ge0}$ a valori in $\mathbb{R}^d$ è detto gaussiano se $\forall t_1,\ldots,t_m\ge0$ la v.a. $(X_{t_1},\ldots,X_{t_m})$ a valori in $\mathbb{R}^{dm}$ è gaussiana.

Oss.: dato un processo gaussiano, la sua legge è identificata dalla funzione di media $t\mapsto\mathbb{E}[X_t]$ e
″ ″ ″ (auto)covarianza $(s,t)\mapsto\mathrm{Cov}(X_s,X_t)$.