Ex.: un processo $(X_t)_{t\geq 0}$ a valori reali gaussiano è stazionario se e solo se
- $\mathbb{E}[X_t]=\mathbb{E}[X_0]\ \forall t$;
- $\Gamma(s,t)=Cov(X_s,X_t)=\Gamma(0,|t-s|)\ \forall s,t\geq 0$.

Prop.: la funzione di covarianza di un processo gaussiano è semidef. pos., cioè $\forall t_1,\dots,t_n\geq 0$ $(\Gamma(t_i,t_j))_{i,j=1,\dots,n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ e sym. e semidef. pos..
Viceversa, data una funzione $(\Gamma(s,t))_{s,t\geq 0}$ semidef. pos. e $(m(t))_{t\geq 0}$ $\exists$ un processo gaussiano con $m(t)=\mathbb{E}[X_t]$ e $Cov(X_s,X_t)=\Gamma(s,t)$.

Dim.: un verso segue dalla bilinearità di Cov e dalla non negatività di Var.
Dato $S=\{t_1,\dots,t_n\}$ poniamo $\mu_S=N\left((m(t_i))_{i=1}^n,(\Gamma(t_i,t_j))_{i,j=1,\dots,n}\right)$ misura su $\mathbb{R}^{\otimes S}$. Se $S'\subseteq S$ $Y_{S'}:\mathbb{R}^{\otimes S}\to\mathbb{R}^{\otimes S'}$ ha legge $N\left((m(t))_{t\in S'},(\Gamma(t,s))_{s,t\in S'}\right)=\mu_{S'}$. Kolmogorov $\Rightarrow$
$\Rightarrow\exists\mu$ misura di prob. su $\left(\mathbb{R}^{[0,+\infty)},(\mathcal{B}(\mathbb{R}))^{\otimes[0,+\infty)}\right)$ che estende tutte le μ_S. $\square$

Es.:
- se $m(t)=0$ e $\Gamma(s,t)=\min\{s,t\}$, $(X_t)_t$ è BM "grossolano";
- $\Gamma(s,t)=\langle\Psi_s,\Psi_t\rangle_{\underset{\hookrightarrow \text{Hilbert}}{H}}$ è semidef. pos.;
- $\Gamma(s,t)=\min\{s,t\}-s\cdot t$, $s,t\in[0,1]$. $\Gamma(s,t)=$
$$=\int_0^1 1\!\!1_{[0,s]}(r)1\!\!1_{[0,t]}(r)\,dr-\left(\int_0^1 1\!\!1_{[0,s]}(r)dr\right)\left(\int_0^1 1\!\!1_{[0,t]}(r)dr\right)=$$
$$=\int_0^1\left(1\!\!1_{[0,s]}-\int_0^1 1\!\!1_{[0,s]}\right)\left(1\!\!1_{[0,t]}-\int_0^1 1\!\!1_{[0,t]}\right).$$
Se $m(t)=0$, $Var(X_t)=\Gamma(t,t)=t-t^2=t(1-t)$ e il processo è detto ponte browniano ($X_0=X_1=0$).
Oss.: se $(B_t)_{t\geq 0}$ è BM, allora $X_t=B_t-tB_1$ è ponte browniano (ex., verifica: gaussiano, medie, covarianze);
- data una misura finita (e positiva) su $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ μ, la sua funzione caratteristica è $\varphi_\mu(t)=\int_{\mathbb{R}}e^{itx}d\mu(x)\in\mathbb{C}$.
Se μ è sym. ($\mu(A)=\mu(-A)\ \forall A\subseteq\mathbb{R}$ borel.) allora $\varphi_\mu(t)$ é reale. Allora $\Gamma(s,t):=\varphi_\mu(t-s)$, $s,t\in\mathbb{R}$ è semidef. pos..
$\Gamma(t,s)=\int_{\mathbb{R}}\underbrace{e^{itx}}_{\Psi_t(x)}\cdot\underbrace{e^{-isx}}_{\overline{\Psi_s(x)}}d\mu(x)=\langle\Psi_t,\overline{\Psi_s}\rangle_{L^2(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mu)}$.

Es.: $\frac{d\mu}{d\mathcal{L}eb}(x)=\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\rightsquigarrow\varphi_\mu(t)=e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\Rightarrow\Gamma(s,t)=e^{-\frac{\sigma^2(t-s)^2}{2}}$ è semidef. pos..

Ex.: $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ con $Cov(X_s,X_t)=e^{-\frac{\sigma^2(t-s)^2}{2}}$, $m(t)=0$ ammette una modificazione α-hölderiana, per quali α?

Es.: $\frac{d\mu}{d\mathcal{L}eb}=\frac{1}{\beta\pi}\cdot\frac{1}{1+(x/\beta)^2}\rightsquigarrow\varphi_\mu(t)=e^{-|t|\beta}\Rightarrow\Gamma(s,t)=e^{-\beta|t-s|}$.

Def.: un processo gaussiano t.c. $\mathbb{E}[X_t]=0$ e $Cov(X_t,X_s)=c\,e^{-\beta|t-s|}$ è detto di Ornstein-Uhlenbeck (di parametri β e c) stazionario. Ex.: $\mathbb{E}[|X_t-X_s|^2]\leq 2c\beta|t-s|$.

Es.: White Noise gaussiano. $\Gamma(s,t)=\begin{cases}1 & \text{se } s=t\\ 0 & \text{se } s\neq t\end{cases}$, $m(t)=0\rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow(X_t)_{t\geq 0}$.

Filtrazioni e tempi di arresto

$(X_t)_{t\geq 0}$, voglio $t\mapsto\mathcal{F}_t$, se $t'\geq t$ $\mathcal{F}_{t'}\supseteq\mathcal{F}_t$.

Def.: dato $(\Omega,\mathcal{F})$ spazio mis. una <u>filtrazione</u> $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ è una famiglia di sotto σ-algebre $\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}$ crescente: $\forall s\leq t$ $\mathcal{F}_s\subseteq\mathcal{F}_t$.

Def.: dato $(X_t)_{t\geq 0}$ proc. stoc. e una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, esso si dice <u>adattato</u> se X_t è $\mathcal{F}_t$-mis. $\forall t\geq 0$.
Dato $(X_t)_{t\geq 0}$ la sua filtrazione naturale è $\mathcal{F}_t:=\sigma(X_s\mid s\leq t)$.

Es.: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ var. indi. unif. su $\{0,1\}$. $\mathcal{F}_n=\sigma(X_i,i=0,1,\dots,n)$ rende $(X_n)_n$ adattato. $S_n=X_0+X_1+\dots+X_n$ è adattato a $(\mathcal{F}_n)_n$.
$(X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ non è adattato a $(\mathcal{F}_n)_n$.

Data $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtrazione, si definiscono $\mathcal{F}_{t^-}=\sigma(\mathcal{F}_s\mid s<t)=\bigvee_{s<t}\mathcal{F}_s$, $\mathcal{F}_{t^+}=\bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s$.

Oss.: $\mathcal{F}_{t^-}\subseteq\mathcal{F}_t\subseteq\mathcal{F}_{t^+}$. Se vale $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{t^+}$, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ è detta continua a destra.

Def.: dato $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$, una v.a. $T:\Omega\to[0,+\infty]$ è detta <u>tempo di arresto</u> (rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$) se vale $\{T>t\},\{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t\ \forall t\geq 0$ ($\Rightarrow\{T<+\infty\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{T\leq n\}\in\mathcal{F}$).

Oss.: $\{T<t\}=\bigcup_{s<t,\, s\in\mathbb{Q}}\{T\leq s\}\in\mathcal{F}_{t^-}$.
Se $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ è continua a dx, $\{T<t\}\in\mathcal{F}_t\ \forall t\Leftrightarrow T$ è t.d.a..

Def.: dato un t.d.a. T, si pone $\mathcal{F}_T$ la σ-algebra degli $A\in\mathcal{F}$ t.c. $A\cap\{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t$ $\forall t\geq 0$.

Es.: T è $\mathcal{F}_T$-mis..

Ex.: se $S\leq T$ t.d.a., allora $\mathcal{F}_S\subseteq\mathcal{F}_T$.

Prop.: sia (E,d) s.m. e siano $C\subseteq E$ chiuso, $A\subseteq E$ aperto, $(X_t)_{t\geq 0}$ $\overset{\text{a traiettorie continue}}{\uparrow}$ processo adattato a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. $T_C=\inf\{t\geq 0\mid X_t\in C\}$, $T_A=\inf\{t\geq 0\mid X_t\in A\}$. Allora:
i) T_C è t.d.a.; ii) T_A è t.d.a. rispetto a $(\mathcal{F}_{t^+})_{t\geq 0}$.

Dim.: sia $d_C:E\to[0,+\infty)$, $d_C(x)=\inf_{y\in C}d(x,y)$.
$T_C=\inf\{t\mid d_C(X_t)=0\}$.
$\{T_C>t\}=\{d_C(X_s)>0\ \forall s\in[0,t]\}=$
$$=\bigcup_{\substack{\varepsilon>0,\\ \varepsilon\in\mathbb{Q}}}\bigcap_{s\in[0,t]\cap\mathbb{Q}}\{d_C(X_s)\geq\varepsilon\}\in\mathcal{F}_t.$$
$$\{T_A\leq t\}=\bigcap_{\substack{t<r<t+\varepsilon_0,\\ r\in\mathbb{Q}}}\{T_A<r\}=\bigcap_{\substack{t<r<t+\varepsilon_0,\\ r\in\mathbb{Q}}}\bigcup_{\substack{s<r,\\ s\in\mathbb{Q}}}\{X_s\in A\}\in\mathcal{F}_{t+\varepsilon_0}$$
$\forall\varepsilon_0>0$. $\square$

Dato un processo $(X_t)_{t\geq 0}$ adattato a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ e un t.d.a. T, vogliamo definire la v.a. $X_T:\Omega\to E$, $\omega\mapsto X_{T(\omega)}(\omega)$. È $\mathcal{F}_T$-mis.?

Def.: un processo $(X_t)_{t\geq 0}$ si dice <u>progressivamente misurabile</u> rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ se $\forall t\geq 0$ la "restrizione"
$X:\Omega\times[0,t]\to E$, $(\omega,s)\mapsto X_s(\omega)$ è mis. quando $\Omega\times[0,t]$ è munito della σ-algebra $\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{B}([0,t])$.

Oss.: se X è progr. mis., allora è adattato.

Es./Ex.: se $(X_t)_{t\geq 0}$ è adattato e ha traiettorie cont. (a dx) allora è progr. mis..

Prop.: se $(X_t)_{t\geq 0}$ è progr. mis. e T è t.d.a. allora $X_T\cdot 1\!\!1_{\{T<+\infty\}}$ è $\mathcal{F}_T$-mis..

Def.: se T è t.d.a. e $(X_t)_{t\geq 0}$ è progr. mis., il processo arrestato a T è $X_t^T=X_{T\wedge t}$ è progr. mis. rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_{T\wedge t})_{t\geq 0}$.

$\forall T$ t.d.a., $\exists T_k\downarrow T$, T_k v.a. semplici a valori in $[0,+\infty]$ e t.d.a..