$\forall T$ t.d.a., $\exists T_k \downarrow T$, T_k v.a. semplici a valori in $[0,+\infty]$ e t.d.a.:

$$T_k = \begin{cases} q2^{-k} & \text{se } (q-1)2^{-k} < T \leq 2^{-k}q \leq k. \\ +\infty & \text{se } T > k \end{cases}$$

Completamento di una filtrazione: $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $(X_t)_{t\geq 0}$ adattato. $(Y_t)_{t\geq 0}$ modificazione è adattato?

Def.: sia $N \subseteq \mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t \mid t \geq 0) (\subseteq \mathcal{F})$ l'insieme degli eventi $\mathbb{P}$-trascurabili. Allora le σ-algebre $(\mathcal{F}^{\mathbb{P}}_t)_{t\geq 0} = (\sigma(\mathcal{F}_t \cup N))_{t\geq 0}$ sono una filtrazione detta il $\mathbb{P}$-completamento di $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
Si chiama l'<u>allargamento abituale</u> la filtrazione $(\mathcal{F}^{\mathbb{P}}_{t+})_{t\geq 0}$ che è $\mathbb{P}$-completa è continua a dx (<u>ipotesi abituali</u>).

Oss.: se invece di una singola $\mathbb{P}$ disponiamo di una famiglia $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$, poniamo $N_\theta = \{A \in \mathcal{F}_\infty \mid \mathbb{P}^\theta(A) = 0\}$ e $N_\Theta = \bigcap_{\theta\in\Theta} N_\theta$. La def. sopra si estende.

Def.: un insieme $\Gamma \subseteq \Omega$ è trascurabile rispetto a una famiglia $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ se $\Gamma \subseteq A_\theta \in N_\theta \ \forall \theta \in \Theta$.

<u>Martingale</u>

Idea: uno scommettitore gioca una sequenza di giochi d'azzardo puntando 1€ in ogni partita e registra l'andamento del suo capitale $M_{t_0} \rightsquigarrow M_{t_1} \rightsquigarrow M_{t_2} \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow M_{t_d}$.

Se i giochi sono onesti ci si aspetta che $\mathbb{E}[M_{t_i} \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}] = M_{t_{i-1}}$.

Def.: sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di prob. e sia $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ una filtrazione ($T = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_d\}$, $T = \mathbb{N}$, $T = [a,b]$, $T = [0,+\infty)$). Allora un processo (a valori reali) $(M_t)_{t\in T}$ è detto $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$-martingala se:

i) è integrabile: $\mathbb{E}[|M_t|] < +\infty \ \forall t \in T$;

ii) è adattato;

iii) $\underbrace{\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] \overset{\mathbb{P}\text{-q.c.}}{=} M_s}_{\text{ortogonalità degli incrementi: } \mathbb{E}[(M_t - M_s) \mid \mathcal{F}_s] = 0} \ \forall s \leq t,\ s,t \in T$.

Se in iii) c'è il $\geq$ si dice submartingala;
" " " " " $\leq$ " " supermartingala.

Oss.: $(M_t)_{t\in T}$, $(N_t)_{t\in T}$ submart. $\Rightarrow$ $(\alpha N_t + \beta M_t)_{t\in T}$ submart. $\forall \alpha,\beta \geq 0$. $\forall \alpha,\beta$ se sono mart. (le mart. sono s.v.).
Se $\varphi: I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo) convessa e $(M_t)_{t\in T}$, $M_t \in I \ \forall t \in T$ (q.c.) e $\varphi(M_t)$ integrabile è mart., allora $(\varphi(M_t))_{t\in T}$ è submart.:
per Jensen condizionale $\mathbb{E}[\varphi(M_t) \mid \mathcal{F}_s] \geq \varphi(\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s]) = \varphi(M_s)$.

Oss.: lo stesso vale se $(M_t)_{t\in T}$ è submart. e φ è convessa e crescente.

Es.: $(B_t)_{t\geq 0}$ BM munito della filtrazione naturale $(\mathcal{F}^0_t)_{t\geq 0}$.

i) $(B_t)_{t\geq 0}$ è mart.;

ii) $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ è mart.;

iii) $(\exp(\alpha B_t - \alpha^2 t/2))_{t\geq 0}$ è mart..

Integrabilità: ok. Adattato: ok. Siano $s \leq t$:

i) $\mathbb{E}[B_t \mid \mathcal{F}^0_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s \mid \mathcal{F}^0_s] + B_s = B_s$;

ii) $\mathbb{E}[B_t^2 \mid \mathcal{F}^0_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s)^2 \mid \mathcal{F}^0_s] =$
$= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] + B_s^2 + 2\mathbb{E}[(B_t - B_s)B_s \mid \mathcal{F}^0_s] =$
$= B_s^2 + t - s$;

iii) $\mathbb{E}[\exp(\alpha B_t) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\exp(\alpha(B_t - B_s))]\exp(\alpha B_s) =$
$\overset{\text{ex.}}{=} \exp(\alpha^2(t-s)/2)\exp(\alpha B_t)$.
se $Z \sim N(m, \sigma^2)$, $\mathbb{E}[\exp(\alpha Z)] = \exp(\alpha m + \alpha^2\sigma^2/2)$

Ex.: siano $(X_i)_{i=1}^{+\infty}$ v.a. indi., $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i \mid i = 1, \ldots, n)$; allora:

i) $S_n = \sum_{i=1}^{n}$ è mart. (se $\mathbb{E}[X_i] = 0 \ \forall i$);

ii) $V_n = \sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - \mathbb{E}[X_i^2])$ " ";

iii) $M_n = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\exp(\alpha X_i)}{\mathbb{E}[\exp(\alpha X_i)]} \right)$ " ".

Def.: $\exp(\alpha B_t - \alpha^2 t/2)$ è detta "esponenziale stocastico" di $(B_t)_{t\geq 0}$.

Se $(M_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ è mart., al tempo $n-1$ possiamo puntare $H_n (\geq 0)$ "euro" e otteniamo $H_n(M_n - M_{n-1})$. Di conseguenza il portafoglio si descrive così:
$$\begin{cases} Y_0 = M_0. \\ Y_n = Y_{n-1} + H_n(M_n - M_{n-1}) \ \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Supponiamo che
- H_n sia $\mathcal{F}_{n-1}$-mis.;
- $H_n(\omega) \leq \overset{\text{cost.}}{C_n}$ $\mathbb{P}$-q.c. $\forall n$;

si ha che $(Y_n)_{n=0}^{+\infty}$ è mart.. Se $(M_n)_n$ è submart., anche $(Y_n)_n$ lo è (stesso con supermart.).

Notazione: il processo Y si indica con $Y = H \cdot M$ ("$H \cdot dM$").

Per verificare che Y è mart.:

i) integrabilità: induzione;

ii) adattato: " ;

iii) $\mathbb{E}[Y_n - Y_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[H_n(M_n - M_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}] =$
$= H_n \mathbb{E}[(M_n - M_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}] = 0$.

Sia $T: \Omega \to \{0,1,2,\ldots\} \cup \{+\infty\}$ t.d.a.. Poniamo $H_n = \mathbb{1}_{\{T > n-1\}} = \mathbb{1}_{\{T \geq n\}} = \mathbb{1}_{[0,T]}(n)$.

Si trova $Y_n = M^T_n = M_{n\wedge T}$.

Conseguenza: $\mathbb{E}[M_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[M_{T\wedge 0}] = \mathbb{E}[M_0] \ \forall n \ \forall T$ t.d.a..

Prop. (teo. di arresto opzionale, versione discreta e limitata): sia $(M_n)_n$ adattato e integrabile. Allora è mart. $\Leftrightarrow$ $\forall S,T$ t.d.a. t.c. $S \leq T \leq \overset{\text{cost.}}{C}$ si ha $\mathbb{E}[M_S] = \mathbb{E}[M_T]$.
Inoltre, vale $\mathbb{E}[M_T \mid \mathcal{F}_S] = M_S$.
Oss.: se $(M_n)_n$ è submart., c'è il $\geq$;
" " " supermart., " " $\leq$.

Dim.: sia $(M_n)_n$ mart.. Poniamo $H_n = \mathbb{1}_{\{T > n-1\}} - \mathbb{1}_{\{S > n-1\}} =$
$= \mathbb{1}_{\{S \leq n-1 < T\}} \Rightarrow \mathbb{E}[Y_C] = \mathbb{E}[(H \cdot M)_C] =$
$= \mathbb{E}[(\mathbb{1}_{\{T > \cdot\}} \cdot M)_C - (\mathbb{1}_{\{S > \cdot\}} \cdot M)_C] = \mathbb{E}[M^T_C - M^S_C] =$
$= \mathbb{E}[M_T - M_S] = \mathbb{E}[Y_0] = 0$. ⌜WLOG $M_0 = 0$⌟

Altra freccia: dati $S \leq T \leq C$ t.d.a. limitati e $B \in \mathcal{F}_S$ definiamo
$$S^B(\omega) = \begin{cases} S(\omega) & \text{se } \omega \in B \\ +\infty & \text{se } \omega \notin B \end{cases}$$
; ex.: S^B è t.d.a..

Similmente definiamo T^B, che è t.d.a. ($\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$).
I tempi $S^B \wedge C$, $T^B \wedge C$ sono t.d.a. limitati $\Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{E}[M_{S^B\wedge C}] = \mathbb{E}[M_{T^B\wedge C}]$
$\mathbb{E}[M_S \mathbb{1}_B + M_C \mathbb{1}_{B^c}] = \mathbb{E}[M_T \mathbb{1}_B + M_C \cdot \mathbb{1}_{B^c}] \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{E}[M_S \mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[M_T \mathbb{1}_B] \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{E}[(M_T - M_S)\mathbb{1}_B] = 0 \ \forall B \in \mathcal{F}_S \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{E}[(M_T - M_S) \mid \mathcal{F}_S] = 0$. **Oss.:** M_S è $\mathcal{F}_S$-mis. (ex.).
Allora $\mathbb{E}[M_T \mid \mathcal{F}_S] = M_S$, in particolare vale per $S = s$ e $T = t$. □