Dim. (dell'ultimo teo. della lezione scorsa):

sappiamo che $\forall a<b$ $\mathbb{E}[D(X,\mathbb{N},[a,b])] \leq \sup_n \mathbb{E}[(X_n-b)^+] \leq$
$\leq \sup_n \mathbb{E}[|X_n|]+|b| <+\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow D(X,\mathbb{N},[a,b])<+\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\mathbb{P}$-q.c. $D(X,\mathbb{N},[a,b])<+\infty$ $\forall a,b \in \mathbb{Q}, a<b \Rightarrow$
$\Rightarrow \liminf_n X_n = \limsup_n X_n$ $\mathbb{P}$-q.c.; infatti,
se $\liminf_n X_n(\omega) < \limsup_n X_n(\omega)$, $\exists a,b\in\mathbb{Q}$ t.c.
$\liminf_n X_n(\omega) < a < b < \limsup_n X_n(\omega) \Rightarrow$
$\Rightarrow D(X(\omega),\mathbb{N},[a,b]) = +\infty$.

Allora $\lim_n X_n(\omega)$ esiste in $\overline{\mathbb{R}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_n |X_n(\omega)|$ " " $[0,+\infty]$. Per Fatou,
$\mathbb{E}[\lim_n |X_n|] \leq \liminf_n \mathbb{E}[|X_n|] \leq \sup_n \mathbb{E}[|X_n|]<+\infty$,
quindi $\lim_n |X_n|$ è integrabile. $\square$

Possiamo anche dire che $\lim_{n\to+\infty} X_n = X_\infty$ in L^1? No.

Es.: siano $(B_t)_{t\geq 0}$ BM, $\alpha\in\mathbb{R}$, $M_t^\alpha = \exp(\alpha B_t - \alpha^2 t/2)$.
$B_n = \sum_{i=1}^n \underbrace{(B_i - B_{i-1})}_{\text{indi. gaussiane}} \Rightarrow \liminf_{n\to+\infty} B_n = -\infty$, $\limsup_{n\to+\infty} B_n = +\infty$
$\mathbb{P}$-q.c.. Allora $(M_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfa le ipotesi del teo.,
$M_n^\alpha \to 0$ lungo una sottosucc. $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} M_n^\alpha = 0$ $\mathbb{P}$-q.c..
Non può essere limite in L^1, altrimenti $0=\mathbb{E}[\lim_n M_n^\alpha] =$
$= \lim_n \mathbb{E}[M_n^\alpha] = 1$.

Es.: $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{B}([0,1])$, $\mathcal{F}_n = \sigma([k2^{-n},(k+1)2^{-n}) \mid k=0,\dots,2^n-1)$,
μ misura di prob. su $[0,1]$. Poniamo $X_n(\omega) = 2^n \mu([k2^{-n},(k+1)2^{-n}))$
se $\omega\in[k2^{-n},(k+1)2^{-n})$, $X_n(1)=0$.
Ex.: con $\mathbb{P}$=Lebesgue, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è mart., $\mathbb{E}[X_n]=1$.
Se $\mu=\delta_x$, $X_\infty=0$, $X_n\to 0$ $\mathbb{P}$-q.c. ma non in L^1.

Uniforme integrabilità e teorema di Vitali

Def.: una famiglia $(X_i)_{i\in I}$ a v.a. reali è detta uniformemente integrabile se $\lim_{\lambda\to+\infty} \sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|\cdot \mathbb{1}_{\{|X_i|>\lambda\}}]=0$.

Oss.: se $(X_i)_{i\in I}=(X)$, X integrabile, allora è unif. integrabile.
Se $(X_i)_{i\in I}$ è unif. int., $\sup_{i\in I}\mathbb{E}[|X_i|]<+\infty$.

Lemma: $(X_i)_{i\in I}$ è unif. int. $\Leftrightarrow$ è limitata in L^1 e $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ t.c. $\forall A\in\mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A)<\delta$ allora $\mathbb{E}[|X_i|\cdot\mathbb{1}_A]<\varepsilon$ $\forall i\in I$.

Dim.: ($\Rightarrow$) limitata ok. Dato $\varepsilon>0$, sia $\lambda>0$ t.c. $\sup_{i\in I}[|X_i|\cdot\mathbb{1}_{\{|X_i|>\lambda\}}]<\frac{\varepsilon}{2}$.
Se $\mathbb{P}(A)<\delta=\frac{\varepsilon}{2\lambda}$, $\mathbb{E}[|X_i|\cdot\mathbb{1}_A]\leq$
$\leq \mathbb{E}[|X_i|\cdot\mathbb{1}_{A\cap\{|X_i|\leq\lambda\}}] + \mathbb{E}[|X_i|\cdot\mathbb{1}_{\{|X_i|>\lambda\}}]<$
$<\lambda\mathbb{P}(A)+\frac{\varepsilon}{2} \leq \lambda\delta+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.
($\Leftarrow$) $\mathbb{P}(|X_i|>\lambda) \underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[|X_i|]}{\lambda} \leq \sup_{i\in I}\frac{\mathbb{E}[|X_i|]}{\lambda}$.
Dato $\varepsilon>0$ troviamo $\delta>0$ e $\lambda = 2\sup_{i\in I}\frac{\mathbb{E}[|X_i|]}{\delta} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{E}[|X_i|\cdot\mathbb{1}_{\underbrace{\{|X_i|>\lambda\}}_{A,\ \mathbb{P}(A)<\delta}}]\leq\varepsilon$. $\square$

Teo. (Vitali): sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unif. int. e convergente in prob. a X_∞.
Allora $X_\infty\in L^1$ e $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}[|X_n-X_\infty|]=0$.

Dim.: no. $\square$

Oss.: se $(Y_j)_{j\in J}$ unif. int., $(X_i)_{i\in I}$ t.c. $\forall i\in I$ $\exists j\in J$ t.c. $|X_i|\leq|Y_j|$, allora $(X_i)_{i\in I}$ unif. int.; infatti, dato $\lambda>0$
$\mathbb{E}[|X_i|\cdot\mathbb{1}_{\{|X_i|>\lambda\}}]\leq\mathbb{E}[|Y_j|\cdot\mathbb{1}_{\{|Y_j|>\lambda\}}]$.

Oss.: se $X_n\xrightarrow{L^1}X_\infty$, allora $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}}$ è unif. int. (ex.).

Es.: sia $X\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, allora $(\mathbb{E}[X\mid\mathcal{G}])_{\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}\ \sigma\text{-a.}}$ è unif. int..
Osserviamo che $|\mathbb{E}[X\mid\mathcal{G}]|\leq\mathbb{E}[|X|\mid\mathcal{G}]$. Inoltre,
$\mathbb{E}[\mathbb{E}[|X|\mid\mathcal{G}]\cdot\mathbb{1}_{\{\mathbb{E}[|X|\mid\mathcal{G}]>\lambda\}}]=$ ($\in \mathcal{G}$)
$=\mathbb{E}[|X|\cdot\mathbb{1}_{\underbrace{\{\mathbb{E}[|X|\mid\mathcal{G}]>\lambda\}}_{A}}]$.
$\mathbb{P}(A)\leq\frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}[|X|\mid\mathcal{G}]]}{\lambda}=\frac{\mathbb{E}[|X|]}{\lambda}$. Siccome (X) è unif. int.,
dato $\varepsilon>0$ $\exists\lambda(\varepsilon)$ t.c. $\mathbb{E}[|X|]/\lambda(\varepsilon)<\delta \overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} \forall\lambda>\lambda(\varepsilon)$
$\mathbb{E}[|X|\cdot\mathbb{1}_{\{\mathbb{E}[|X|\mid\mathcal{G}]>\lambda\}}]<\varepsilon$.

Teo. $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mart.. TFAE:
1) $\lim_{n\to+\infty}M_n$ esiste in L^1;
2) $\exists M_\infty\in L^1$ t.c. $\mathbb{E}[M_\infty\mid\mathcal{F}_n]=M_n$ $\mathbb{P}$-q.c. $\forall n$ (la martingala è chiusa da M_∞);
3) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è unif. int..

Oss.: se valgono 1), 2), 3), allora $\sup_n\mathbb{E}[|M_n|]<+\infty$ e $M_n\xrightarrow{\mathbb{P}\text{-q.c.}}M_\infty$.
Doob + Lebesgue: 1), 2), 3) valgono se $\exists p>1$ t.c. $\sup_n\mathbb{E}[|M_n|^p]<+\infty$, perché $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è dominata da $\sup_n|M_n|\in L^p$ e $M_n\xrightarrow{L^p}M_\infty\in L^p$.

Dim.: 1) $\Rightarrow$ 2) Se $\exists M_\infty=\lim_{n\to+\infty}M_n$ limite in L^1 (oss.: $M_\infty\in L^1(\mathcal{F}_\infty)$).
Fissato $n\in\mathbb{N}$, $\forall m\geq n$ $\mathbb{E}[M_m\mid\mathcal{F}_n]=M_n$.
Oss.: $\mathbb{E}[|\mathbb{E}[X\mid\mathcal{G}]-\mathbb{E}[Y\mid\mathcal{G}]|]\leq\mathbb{E}[|X-Y|]$. Allora
$M_m\xrightarrow{L^1}M_\infty\Rightarrow\mathbb{E}[M_\infty\mid\mathcal{F}_n]=M_n$.
2) $\Rightarrow$ 3) $M_n=\mathbb{E}[M_\infty\mid\mathcal{F}_n]$, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq(\mathbb{E}[M_\infty\mid\mathcal{G}])_{\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}_\infty\ \sigma\text{-a.}}\Rightarrow$
$\Rightarrow(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unif. int..
3) $\Rightarrow$ 1) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unif. int. $\Rightarrow\sup_n\mathbb{E}[|M_n|<+\infty]\Rightarrow$
$\Rightarrow\exists\lim_{n\to+\infty}M_n=M_\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. $\overset{\text{Vitali}}{\Longrightarrow}\mathbb{E}[|M_n-M_\infty|]\to0$. $\square$

Es.: sia $(M_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ mart.. Allora $\lim_{n\to-\infty}M_n=M_{-\infty}$ esiste $\mathbb{P}$-q.c. e in L^1 e coincide con $\mathbb{E}[M_0\mid\mathcal{F}_{-\infty}]$, $\mathcal{F}_{-\infty}=\bigcap_{n\in-\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$.
Infatti: $M_n=\mathbb{E}[M_0\mid\mathcal{F}_n]\Rightarrow(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è unif. int..
La convergenza q.c. è lo stesso argomento usato per il limite a $+\infty$. Vitali $\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}M_n=M_{-\infty}$ $\exists$ L^1 e $\mathbb{P}$-q.c..
$M_{-\infty}$ è misurabile rispetto a $\mathcal{F}_n$ $\forall n\leq0\Rightarrow$ è $\mathcal{F}_{-\infty}$-mis..
Sia $A\in\mathcal{F}_{-\infty}\subseteq\mathcal{F}_k\subseteq\mathcal{F}_n$. $\mathbb{E}[M_k\cdot\mathbb{1}_A]=\mathbb{E}[M_n\cdot\mathbb{1}_A]\Rightarrow$
$\Rightarrow M_{-\infty}=\mathbb{E}[M_n\mid\mathcal{F}_{-\infty}]$. ($\mathbb{E}[M_k\cdot\mathbb{1}_A] \to \mathbb{E}[M_{-\infty}\cdot\mathbb{1}_A]$)

Cor.: sia $(X_n)_{n=0}^{+\infty}$ v.a. dominate da $Y\in L^1(\mathbb{P})$ e $X_n\to X$ $\mathbb{P}$-q.c., e $(\mathcal{F}_n)_n$ filtrazione. Allora $\mathbb{E}[X_n\mid\mathcal{F}_n]\to\mathbb{E}[X\mid\mathcal{F}_\infty]$ in L^1 e $\mathbb{P}$-q.c..

Dim.: no. $\square$

Passiamo a tempi continui: $(M_t)_{t\geq0}$ mart. t.c. $\sup_{t\geq0}\mathbb{E}[|M_t|]<+\infty$.
Dato $t\geq0$ poniamo $M_{t^-}=\lim_{s\to t^-,\ s\in\mathbb{Q}}M_s$ e M_{t^+} analogo. (serve $t>0$)

Teo.: se $(M_t)_t$ è mart. lim., allora $\mathbb{P}$-q.c. $\exists M_{t^-},M_{t^+}$ $\forall t$.

Dim.: no. $\square$

Vale che: $\forall t$ $\mathbb{P}$-q.c. $M_t=\mathbb{E}[M_{t^+}\mid\mathcal{F}_t]$, $M_{t^-}=\mathbb{E}[M_t\mid\mathcal{F}_{t^-}]$.

Teo.: se $(\mathcal{F}_t)_{t\geq0}$ soddisfa le ipotesi abituali allora $\exists$ modificazione $(\tilde{M}_t)_{t\geq0}$ di $(M_t)_{t\geq0}$ mart. limitata in L^1 che ha traiettorie cadlag.

Dim.: no. $\square$

Oss.: $(\tilde{M}_t)_{t\geq0}$ è mart.. $\forall t$ $\mathbb{P}$-q.c. $\tilde{M}_t=M_t$ e
cioè a meno di un insieme $\mathcal{F}_t$-trascurabile
$\mathbb{E}[M_t\mid\mathcal{F}_s]=\mathbb{E}[\tilde{M}_t\mid\mathcal{F}_s]$.
$M_s=\tilde{M}_s$

Teo.: se $(M_t)_{t\geq0}$ è mart. cadalg e $\exists+\infty>C>0$ cost. t.c. $S\leq T\leq C$ t.d.a. allora $\mathbb{E}[M_S]=\mathbb{E}[M_T]$.
Se $(M_t)_{t\geq0}$ è unif. int., lo stesso vale $\forall S\leq T\leq+\infty$ t.d.a., dove $M_\infty=\lim_{t\to+\infty}M_t$.

Dim.: no. $\square$