Nuclei di Probabilità

Def.: se $(E,\mathcal{E})$ è spazio mis., $N: E\times\mathcal{E}\to[0,+\infty]$ è un <u>nucleo</u> su E se: 1) $\forall A\in\mathcal{E}$ $x\mapsto N(x,A)$ è mis.;
2) $\forall x\in E$ $A\mapsto N(x,A)$ è una misura su $(E,\mathcal{E})$,
se è di prob. $\forall x$, N è detto nucleo di probabilità.

Oss.: un nucleo agisce sulle funzioni misurabili non negative: $f\in L^0_+(E,\mathcal{E})$, $Nf(x)=\int_E N(x,dy)f(y)\in L^0_+(E,\mathcal{E})$.
M,N nuclei su E
$\widetilde{MN}f(x)=\int_E M(x,dy)Nf(y)\in L^0_+$.

Oss.: se N è nucleo di prob. su E finito, la successione di misure di prob. δ_x, $N(x,A)$, $N^2(x,A)$, N^3 ... è la legge di una catena di Markov a stati finiti.

Ricordiamo: se $X:\Omega\to(E,\mathcal{E})$ v.a., $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$,
$\mathbb{P}(X\in A\mid\mathcal{G})=\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)\mid\mathcal{G}]$ è una v.a. $\mathcal{G}$-mis..

Teo. (versione regolare): se $(\Omega,\mathcal{F})$ è polacco (top., metrizzabile in modo completo, ha un denso numerabile), $\mathcal{F}$ i boreliani, $\exists$ modificazione del processo stocastico $(\mathbb{P}(X\in A\mid\mathcal{G}))_{A\in\mathcal{E}}$ t.c.:
1) $A\mapsto\mathbb{P}(X\in A\mid\mathcal{G})$ è prob. $\mathbb{P}$-q.c.;
2) $\forall A\in\mathcal{E}$ $\omega\mapsto\mathbb{P}(X\in A\mid\mathcal{G})(\omega)$ è mis..

Se $(X_t)_{t\in[0,+\infty)}$ è proc. stoc. a valori in $(E,\mathcal{E})$, $\mathcal{F}^X_t=\sigma(X_s\mid s\leq t)$ ed esistono nuclei di prob. $P_{s,t}$, $s<t$ t.c. $\mathbb{P}(X_t\in A\mid\mathcal{F}^X_s)=$
$=P_{s,t}(X_s,A)$ (equivalentemente, $\forall f\in L^0_+$ $\mathbb{E}[f(X_t)\mid\mathcal{F}^X_s]=$
$=P_{s,t}f(X_s)$); allora se $s<t<r$ $P_{s,r}(X_s,A)=\mathbb{P}(X_r\in A\mid\mathcal{F}^X_s)=$
$=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X_r)\mid\mathcal{F}^X_t]\mid\mathcal{F}^X_s\right]=\mathbb{E}[P_{t,r}(X_t,A)\mid\mathcal{F}^X_s]=$
$=\int_E P_{s,t}(X_s,dy)P_{t,r}(y,A)$.

Def.: una famiglia $(P_{s,t})_{\substack{s,t\in[0,+\infty)\\ s<t}}$ di nuclei di prob. su $(E,\mathcal{E})$ si dice <u>probabilità di transizione</u> se (Chapman–Kolmogorov) $\forall s<t<r$ $\forall x\in E$ $P_{s,r}(x,A)=\int_E P_{s,t}(x,dy)P_{t,r}(y,A)$.
Se $P_{t,s}(x,A)$ dipende solo da $t-s$, $P_{s,t}(x,A)=P_{0,t-s}(x,A)=$
$=P_{t-s}(x,A)$, si dice che la prob. di trans. è <u>omogenea nel tempo</u> e (C–K) dice che $(P_t)_{t\in[0,+\infty)}$ è un semigruppo.

Processi di Markov

Def.: $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ filtrato, $(X_t)_{t\in[0,+\infty)}$ a valori in $(E,\mathcal{E})$ adattato, $\mathcal{G}_t$ filtrazione $\subseteq\mathcal{F}$, ν misura su $(E,\mathcal{E})$; se $\forall f\in L^0_+(E,\mathcal{E})$
$\mathbb{E}[f(X_t)\mid\mathcal{G}_s]=P_{s,t}f(X_s)$ $\forall s<t$ con $P_{s,t}$ prob. di trans. su $(E,\mathcal{E})$ e $(X_0)_\#\mathbb{P}=\nu$, si dice che X è di Markov rispetto a $\mathcal{G}_t$ con prob. di trans. $P_{s,t}$ e distribuzione iniziale ν.

Es.: il BM standard $(B_t)_{t\in[0,+\infty)}$ è Markov rispetto a $\mathcal{F}^B_t$.
$\mathbb{E}[f(B_t)\mid\mathcal{F}^B_s]=\mathbb{E}[f(B_t-B_s+B_s)\mid\mathcal{F}^B_s]=\mathbb{E}_{Z\sim N(0,t-s)}[f(Z+a)]\big|_{a=B_s}=$
$=\int_{\mathbb{R}}f(z+B_s)\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{-\frac{z^2}{2(t-s)}}dz\Rightarrow P_{s,t}(x,A)=P_{t-s}(x,A)=$
$=\int_A\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2(t-s)}}dz$.

Prop. (caratterizzazione): $(X_t)_{t\in[0,+\infty)}$ è Markov rispetto a $\mathcal{F}^X_t$ con prob. di trans. $P_{s,t}$ e distribuzione iniziale ν $\iff$
$\iff\forall 0=t_0<t_1<\ldots<t_k$, $f_0,f_1,\ldots,f_k\in L^0_+$
$\bigstar=\mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^k f_i(X_{t_i})\right]=$
$=\int_E\nu(dx_0)f_0(x_0)\int_E P_{t_0,t_1}(x_0,dx_1)f_1(x_1)\ldots\int_E P_{t_{k-1},t_k}(x_{k-1},dx_k)f_k(x_k)$.

Dim.: $(\Rightarrow)$ $\bigstar=\mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{k-1}f_i(X_{t_i})\,\mathbb{E}\left[f_k(X_k)\mid\mathcal{F}^X_{t_{k-1}}\right]\right]=$
$=\mathbb{E}\left[\prod_{i=0}^{k-1}f_i(X_{t_i})P_{t_{k-1},t_k}f_k(X_{t_{k-1}})\right]$, induzione.
$(\Leftarrow)$ Vogliamo che $\forall Y$ $\mathcal{F}^X_s$-mis. valga $\mathbb{E}[Y\mathbb{E}[f(X_t)\mid\mathcal{F}^X_s]]=$
$=\mathbb{E}[YP_{s,t}f(X_s)]$. Con un argomento di densità, basta controllare $Y=\prod_{i=0}^k f_i(X_{t_i})$, $t_i\leq s$, $f_i\in L^0_+$. $\square$

Teo. (esistenza): date prob. di trans. $P_{s,t}$ su $(E,\mathcal{E})$, ν prob. su $(E,\mathcal{E})$, $\exists!$ una prob. $\mathbb{P}_\nu$ su $(E^{[0,+\infty)},\mathcal{E}^{\otimes[0,+\infty)})$ t.c. il processo $X_t: E^{[0,+\infty)}\to E$, $X_t((e_s)_{s\in[0,+\infty)})=e_t$ sia Markov rispetto a $\mathcal{F}^X_t$ con prob. di trans. $P_{s,t}$ e distribuzione iniziale ν.

Dim.: $\forall 0=t_0<t_1<\ldots<t_k$, $A_0,\ldots,A_k\in\mathcal{E}$ definiamo
$P_{t_0,t_1,\ldots,t_k}(A_0\times\ldots\times A_k)=\int_{A_0}\nu(dx_0)\int_{A_1}P_{t_0,t_1}(x_0,dx_1)\ldots\int_{A_k}P_{t_{k-1},t_k}(x_{k-1},dx_k)$.
Queste distribuzioni in dim. finita soddisfano le ipotesi del teo. di estensione di Kolmogorov. $\square$

Ex.: B_t BM standard, $X_t=\int_0^t B_s\,ds$. X_t non è Markov rispetto a $\mathcal{F}^B_t$. Hint: $X_t=X_s+\int_s^t(B_r-B_s)dr+(t-s)B_s$. Condizionare su $\mathcal{F}^B_s$: X_s, $(t-s)B_s$ sono mis., $\int_s^t(B_r-B_s)dr$ è indi.. Fai i conti.
Ma (X_t,B_t) è Markov rispetto a $\mathcal{F}^B_t$. Calcola il nucleo.