Notazione: nel contesto della scorsa lezione, $x \in E$, $\mathbb{P}_x := \mathbb{P}_{\delta_x}$,

$$\mathbb{E}_\nu[Y] = \int_{E^{[0,+\infty)}} Y \, d\mathbb{P}_\nu, \quad Y \in L^0_+(E^{[0,+\infty)}, \mathcal{E}^{\otimes [0,+\infty)}).$$

Prop. (disintegrazione): $\mathbb{E}_\nu[Y] = \int_E \mathbb{E}_x[Y] \, \nu(dx)$.

Dim.: no. $\square$

Proprietà di Markov

Supponiamo d'ora in avanti di trattare prob. di trans. omogenee nel tempo.

Notazione: $\forall t \in [0,+\infty)$, $\theta_t : E^{[0,+\infty)} \to E^{[0,+\infty)}$, $(e_s)_{s \in [0,+\infty)} \mapsto (e_{t+s})_{s \in [0,+\infty)}$.

Teo.: $\forall Y \in L^0_+(E^{[0,+\infty)}, \mathcal{E}^{\otimes [0,+\infty)})$ (o limitata) $\forall t \in [0,+\infty)$ $\forall \nu$ prob. su $(E, \mathcal{E})$ (assegnate prob. di trans. P_t) si ha

$$\mathbb{E}_\nu[Y \circ \theta_t \mid \mathcal{F}^X_t] = \mathbb{E}_{X_t}[Y] = \int_{E^{[0,+\infty)}} Y \, d\mathbb{P}_{X_t} \quad \mathbb{P}_\nu\text{-q.c.}.$$

Oss.: se $Y = \mathbb{1}_A(X_s)$, $A \in \mathcal{E}$, ho LHS $= \mathbb{P}_\nu(X_{t+s} \in A \mid \mathcal{F}^X_t) = P_s(X_t, A)$.

Dim.: vogliamo che $\forall Z$ $\mathcal{F}^X_t$-mis. si ha

$$\mathbb{E}[Z \, \mathbb{E}_\nu[Y \circ \theta_t \mid \mathcal{F}^X_t]] = \mathbb{E}[Z \, \mathbb{E}_{X_t}[Y]].$$

Per approssimazione con classi monotone è sufficiente verificarlo per Z, Y della forma $Z = \prod_{i=1}^{n} f_i(X_{t_i})$, Y stesso con le g_j, $f_i, g_j \in L^0_+(E, \mathcal{E})$, $t_i, t_j \leq t$.

Dunque la tesi è ricondotta alla formula per $\mathbb{E}\left[\prod_{l=0}^{k} h_l(X_{t_l})\right]$ vista come caratterizzazione di proc. Markov. $\square$

Processi di Feller

Def.: un semigruppo di Feller è un semigruppo di operatori lineari positivi su $C_0(E)$ (E s.t. loc. cpt a base numerabile) $(T_t)_{t \in [0,+\infty)} : C_0(E) \xrightarrow{\text{lineare}} C_0(E)$ t.c. $T_t \circ T_s = T_{t+s}$ $\forall t, s \geq 0$, $T_t f \geq 0$ se $f \geq 0$ e t.c. inoltre:

1) $T_0 = id$; 2) $\|T_t f\|_{C_0(E)} \leq \|f\|_{C_0(E)}$ $\forall f$ $\forall t$;

3) $t \mapsto T_t$ è continuo nella norma degli operatori, ovvero $\lim_{t \to 0} \|T_t f - f\| = 0$.

Lemma: c'è una corrispondenza 1-1 fra:

$$\left\{\begin{matrix}\text{semigruppi} \\ \text{Feller } T_t\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{sub-probabilità di transizione} \\ \text{omogenee } P_t \text{ che soddisfano 1) e 2) del lemma dopo}\end{matrix}\right\}$$

$P_t(x,E) \leq 1$; = nuclei di transizione di Feller

$$T_t f(x) = P_t f(x) = \int_E P_t(x, dy) f(y).$$

Ricordiamo (rappresentazione di Riesz-Markov): i funzionali lineari, cont. e positivi su $C_0(E)$ sono tutti e soli $Lf = \int f(x) \mu(dx)$, μ misura finita, $\mu(E) = \|T\| = \sup \frac{\|Tf\|}{\|f\|}$. (vedi sotto)

Dim.: $\forall x$, $f \mapsto T_t f(x)$ è lineare, cont. e positiva, quindi $\forall x$ $\exists \mu^t_x$ misura su E t.c. $T_t f(x) = \int f(y) \, d\mu^t_x(y)$. Ma $x \mapsto T_t f(x)$ è cont. $\forall f$, dunque Borel; allora poniamo $P_t(x, A) = \mu^t_x(A)$. Questi sono nuclei su E; dalle proprietà di T_t deriva che P_t sono sub-prob. di trans.. $\square$

Def.: X_t di Markov (in E, sotto $\mathbb{P}_\nu$, con prob. di trans. P_t) è Feller se P_t sono prob. di trans. di Feller nel senso sopra.

Lemma: X_t è Feller se e solo se:

1) $\forall t$ $P_t C_0(E) \subseteq C_0(E)$;

2) $\forall f \in C_0(E)$ $\lim_{t \to 0} P_t f(x) = f(x)$.

Dim.: no. $\square$

Oss.: il BM è Feller.

Teo.: se X è di Feller:

1) X ha una modificazione cadlag;

2) $\mathcal{F}^\nu_t = \mathcal{F}^X_t \cup \{\mathbb{P}_\nu\text{-trascurabili}\}$ (la modificazione), $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\nu \text{ mis.}} \mathcal{F}^\nu_t$ sono continue a dx;

3) la modificazione X è ancora Markov e soddisfa la proprietà di Markov rispetto a $\mathcal{F}_t$.

Oss.: 1) segue (anche) dalla convergenza della supermart.

$$e^{-\alpha t} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha s} P_s f(X_t) \, ds;$$

2) un altro esempio di processo di Feller è il processo di Poisson N_t (non ha traiettorie cont.)

Ex.: $(X_t)_{t \in [0,+\infty)}$ a valori in $\mathbb{R}$ gaussiano e centrato è Markov (rispetto a $\mathcal{F}^X_t$) $\iff$ posto $C(t,s) = \mathbb{E}[X_t X_s]$ $\forall r < s < t$

$$C(r,t) C(s,s) = C(r,s) C(s,t). \qquad (C(t,t) \neq 0 \ \forall t)$$

Sol.: sappiamo che $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}^X_r] = \mathbb{E}[X_t \mid X_r]$.

$\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}^X_r] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}^X_s] \mid \mathcal{F}^X_r]$.

$\mathbb{E}[X_t \mid X_r] = \mathbb{E}[X_t - \rho X_r + \rho X_r \mid X_r] = \rho X_r$ se

$\rho = \frac{C(r,t)}{C(r,r)}$. Allora $\frac{C(r,t)}{C(r,r)} = \frac{C(s,t)}{C(s,s)} \cdot \frac{C(r,s)}{C(r,r)}$.