Es.: $E=\mathbb{R}^d$, se $(\mu_t)_{t\geq 0}$ è una famiglia di prob. su $\mathbb{R}^d$ t.c. $\mu_0=\delta_0$, $\forall t,s$ $\mu_t*\mu_s=\mu_{t+s}$, $\forall f\in C_0(\mathbb{R}^d)$ $\lim_{t\to 0}\int f\,d\mu_t=\int f\,d\mu_0$.

In questo caso $P_t(x,A)=\mu_t(A-x)$ è Feller.

Esempi: $\gamma_t(dx)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-x^2/2t}dx$;

$p_t=\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\delta_k$.

$\mathbb{E}[f(X_t-X_0)]=\int f(y-x)\,d\mu_t(y)$.

$\mathbb{E}[f(X_t-X_s)|\mathcal{F}_s^X]=\mathbb{E}_{X_s}[f(X_{t-s}-X_0)]=\int f(y-X_s)\,d\mu_{t-s}(y)$.

Proprietà forte di Markov

$(E,\underset{\text{boreliani}}{\mathcal{E}})$ loc. cpt e a base numerabile, $X_t:E^{[0,+\infty)}\to E$,

ν prob. su $(E,\mathcal{E})$, $(P_t)_{t\geq0}$ prob. di trans. omogenee di Feller.

Consideriamo una modificazione cadlag di X (la indichiamo con X).

$\mathcal{F}_\infty^\nu=\overline{\mathcal{E}^{\otimes[0,+\infty)}}^{P_\nu}$, $\mathcal{F}_\infty=\bigcap_{\nu\text{ prob.}}\mathcal{F}_\infty^\nu$.

$\mathcal{F}_t^\nu=\mathcal{F}_t^X\cup\{P_\nu\text{-trascurabili}\}$, $\mathcal{F}_t=\bigcap_{\nu\text{ prob.}}\mathcal{F}_t^\nu$ è continua a dx.

$\forall Y\in L^0_+(E^{[0,+\infty)},\mathcal{F}_\infty)$ $\mathbb{E}[Y\circ\theta_t|\mathcal{F}_t]=\mathbb{E}_{X_t}[Y]$ P_ν-q.c..

τ è un $\mathcal{F}_t$-t.d.a. se $\{\tau\leq t\}\in\mathcal{F}_t$.

$\mathcal{F}_\tau=\{A\in\mathcal{F}_\infty \,|\, A\cap\{\tau\leq t\}\in\mathcal{F}_t\}$.

Teo.: se τ è un $\mathcal{F}_t$-t.d.a. finito, $\forall\nu, Y\in L^0_+(\mathcal{F}_\infty)$ si ha
$\mathbb{E}_\nu[Y\circ\theta_\tau|\mathcal{F}_\tau]=\mathbb{E}_{X_\tau}[Y]$.

Dim.: se τ assume numerabili valori $d\in D\subseteq[0,+\infty)$,

LHS $=\sum_{d\in D}\mathbb{1}_{\{\tau=d\}}\mathbb{E}_\nu[Y\circ\theta_d|\mathcal{F}_d]=\sum_{d\in D}\mathbb{1}_{\{\tau=d\}}\mathbb{E}_{X_d}[Y]=\mathbb{E}_{X_\tau}[Y]$.

Mostriamo la tesi per $Y=\prod_{i=1}^k f_i(X_{t_i})$, $f_1,\dots,f_k\in C_0(E)$, $t_1,\dots,t_k\in[0,+\infty)$.

Approssimiamo τ con $\tau_m=\frac{\lceil 2^m\tau\rceil}{2^m}\downarrow\tau$.

$\mathbb{E}_\nu\left[\prod_{i=1}^k f_i(X_{t_i})\circ\theta_{\tau_m}\,|\,\mathcal{F}_{\tau_m}\right]\underset{\substack{\downarrow\\ \tau_m \text{ ha valori}\\ \text{numerabili}}}{=}\mathbb{E}_{X_{\tau_m}}\left[\prod(\dots)\right]=$

$=\int_E P_{t_1}(X_{\tau_m},dx_1)f(x_1)\cdot$

$\cdot\int_E P_{t_2-t_1}(x_1,dx_2)f(x_2)\dots\int_E P_{t_k-t_{k-1}}(x_{k-1},dx_k)f(x_k)=$

$=F_{\substack{f_1,\dots,f_k,\\ t_1,\dots,t_m}}(X_{\tau_m})$, $F_{\substack{f_1,\dots,f_k,\\ t_1,\dots,t_m}}:E\to E$ è cont. perché P_t è Feller.

L'RHS converge all'RHS che vogliamo. Per l'LHS si usa la con. dom. per speranze condizionali (e la continuità a dx di $\mathcal{F}_t$).

Lemma: se $X_m\xrightarrow{q.c.}X$, $\mathcal{F}_m$ decrescente, $\mathcal{F}=\bigcap_m\mathcal{F}_m$,
$|X_m|\leq Y$, $Y\in L^1(P)\Rightarrow \mathbb{E}[f(X_m)|\mathcal{F}_m]\xrightarrow[m]{q.c.}\mathbb{E}[f(X)|\mathcal{F}]$.

Dim.: ex. □ □

Lemma: se $\tau,\tilde\tau$ sono $\mathcal{F}_t$-t.d.a.: 1) $\tau+s$ è $\mathcal{F}_t$-t.d.a. $\forall s$;
2) $\tau+\tilde\tau\circ\theta_\tau$ è $\mathcal{F}_t$-t.d.a..

Dim.: no. □

Lemma: $\tau,\tilde\tau,X$ come sopra. Allora:

1) $P_\tau P_{\tilde\tau}f=P_{\tilde\tau+\tau\circ\theta_{\tilde\tau}}f$ $\forall f\in C_0$;

2) $Y_t=X_{t+\tau}$ è Markov (rispetto a $\mathcal{F}_{t+\tau}$) con le stesse prob. di trans..

Dim.: 1) $P_\tau P_{\tilde\tau}f(x)=\mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_{X_{\tilde\tau}}[f(X_\tau)]\right]\underset{\substack{\downarrow\\ \text{Markov forte}}}{=}$

$=\mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}[f(X_\tau)\circ\theta_{\tilde\tau}|\mathcal{F}_{\tilde\tau}]\right]=\mathbb{E}_x[f(X_\tau)\circ\theta_{\tilde\tau}]=$

$=P_{\tilde\tau+\tau\circ\theta_{\tilde\tau}}f(x)$.

2) $\mathbb{E}[f(X_{t+\tau+s})|\mathcal{F}_{\tau+t}]=P_sf(X_{t+\tau})$. □

Diciamo che B_t processo reale è un BM (rispetto a $\mathcal{F}_t$ a cui è adattato) che inizia da ν prob. su $\mathbb{R}$ se è un processo di Markov rispetto a $\mathcal{F}_t$ con prob. di trans. omogenee $P_t(x,A)=\int_A\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-(y-x)^2/2t}dx$ e $\mathcal{L}(X_0)=\nu$.

Fatto: $\forall\tau$ $\mathcal{F}_t$-t.d.a., $\overbrace{B_{\tau+t}-B_\tau}^{X_t}$ è un BM con distribuzione iniziale δ_0 rispetto a $\mathcal{F}_{\tau+t}$. X_t è indi. da B_τ ($\mathbb{E}[f(B_{t+\tau}-B_\tau)|B_\tau]=\mathbb{E}[f(N(0,t))]=\text{cost.}$).

Diciamo che B_t è il BM standard d'ora in poi, $\tau_a=\inf\{t\geq0\,|\,B_t=a\}$,
$S_t=\sup_{s\in[0,t]}B_s$.

Teo. (principio di riflessione): $\forall t\geq0$, $a\in\mathbb{R}$ $P(S_t\geq a)=P(\tau_a\leq t)=$
$=2P(B_t\geq a)=P(|B_t|\geq a)$.

Dim.: $P(S_t\geq a)=P(B_t\geq a)+P(S_t\geq a,B_t<a)$.

$P(S_t\geq a,B_t<a)=P(\tau_a\leq t,B_t<a)=$

$=P(\tau_a\leq t,\underbrace{(B_t-B_{\tau_a})}_{X_{t-\tau_a}}+\underset{\substack{\shortparallel\\ a}}{B_{\tau_a}}<a)=P(\tau_a\leq t)P(X_{t-\tau_a}<0\,|\,\tau_a\leq t)$.

$P(X_{t-\tau_a}<0\,|\,\tau_a\leq t)=\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{(-\infty,0)\}}(X_{t-\tau_a})\,|\,\tau_a\leq t]=$

$=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\dots\}}(\dots)|\mathcal{F}_{\tau_a}]\,|\,\tau_a\leq t\right]$.

$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{(-\infty,0)\}}(B_t-B_{\tau_a})|\mathcal{F}_{\tau_a}\right]=\mathbb{E}_{X_{\tau_a}}\left[\mathbb{1}_{\{(-\infty,0)\}}(B_{t-\tau_a}-B_0)\right]=$

$=P_{X_{\tau_a}}[B_{t-\tau_a}-B_0<0]=1/2$. □