Prop.: $T_a = \inf\{t>0 \mid B_t = a\}$, $\tilde{T}_a = \inf\{t>0 \mid |B_t| = a\}$ $(a>0) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{E}[\exp(-\lambda T_a)] = \exp(-a\sqrt{2\lambda})$,
$\mathbb{E}[\exp(-\lambda \tilde{T}_a)] = (\cosh(a\sqrt{2\lambda}))^{-1}$.

Dim.: $\forall s \geq 0$, $M_t^s = \exp(sB_t - s^2 t/2)$ è mart. $\Rightarrow$ ex./vedi libro
$\Rightarrow M^s_{t\wedge T_a}$ è mart. $\leq e^{sa} \Rightarrow$ unif. int. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{E}[M^s_{T_a}] = \mathbb{E}[M^s_0] = 1 \Rightarrow \mathbb{E}[\exp(-s^2 T_a/2)] = e^{-sa}$,
prendiamo $\lambda = s^2/2$.
Per l'altra uguaglianza, si usa la mart. $(M^s_t + M^{-s}_t)/2 =$
$= \cosh(sB_t)\exp(-s^2 t/2)$. $N^s_{t\wedge\tilde{T}_a}$ è $\leq \cosh(sa)$. □

Prop.: $\forall a<x<b$ si ha $\underset{\substack{\downarrow \\ \text{legge di } X = x + BM}}{\mathbb{P}_x}[T_a < T_b] = \frac{b-x}{b-a}$.

Dim.: $\mathbb{P}_x[T_a<T_b] + \mathbb{P}_x[T_b<T_a] = 1$ (1).
$X^{T_a\wedge T_b}$ è una mart. lim. $\Rightarrow$
$\Rightarrow a\mathbb{P}_x[T_a<T_b] + b\mathbb{P}_x[T_b<T_a] =$
$= \mathbb{E}_x[X_{T_a\wedge T_b}] = \mathbb{E}_x[X^{T_a\wedge T_b}_{T_a\wedge T_b}] = \mathbb{E}_x[X^{T_a\wedge T_b}_0] = x$ (2).
(1) + (2) $\Rightarrow$ tesi. □

Decomposizione di Doob

Prop.: sia $(X_n)_{n=0}^T$ una submart.. Allora $\exists!$ processo $(A_n)_{n=0}^T$
t.c.:
- $A_n = 0$;
- $A_n \geq A_{n-1}$ $\forall n = 1,\dots,T$ (crescente);
- A_n è $\mathcal{F}_{n-1}$-mis. $\forall n=1,\dots,T$ (prevedibile);
- il processo $N_n = X_n - A_n$ è una mart..

In particolare, $\forall S$ t.d.a. lim. $\mathbb{E}[N_S] = \mathbb{E}[N_0] \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{E}[X_S] - \mathbb{E}[A_S] = \mathbb{E}[X_0]$.

Oss.: N_n mart., X_n submart. $\Rightarrow$ integrabili $\Rightarrow A_n$ integrabili.

Dim.: unicità: PA $X_n = N_n + A_n = N_n' + A_n' \Rightarrow$
$\Rightarrow N_n - N_n' = A_n' - A_n$ $\forall n \geq 0$.
$n=0$: $A_0 = A_0' \Rightarrow N_0 = N_0' = X_0$.
Induzione: $A_n = A_n'$, $N_n = N_n' \Rightarrow$
$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ N_n - N_n' = 0}}{\mathbb{E}[N_{n+1} - N_{n+1}' \mid \mathcal{F}_n]} = \underset{\substack{\| \\ A'_{n+1} - A_{n+1}}}{\mathbb{E}[A'_{n+1} - A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]} \Rightarrow$
$\Rightarrow A_{n+1} = A'_{n+1} \Rightarrow N_{n+1} = N'_{n+1}$.

Esistenza: per ricorsione. $A_0 = 0$. Avendo già definito A_n, vogliamo $A_{n+1} = X_{n+1} - N_{n+1}$.
$A_{n+1} = \mathbb{E}[A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] - N_n$,
cioè poniamo $A_{n+1} := \mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] - X_n + A_n$.
X submart. $\Rightarrow A$ crescente. È prevedibile per def. (induzione). Ci manca: $X_{n+1} - A_{n+1}$ mart..
$\mathbb{E}[X_{n+1} - A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n - A_n$. □

Caso particolare: $(M_n)_{n=0}^T$ mart. di quadrato integrabile.
$X_n = M_n^2 = N_n + A_n$; il processo A_n è spesso indicato con $[M]_n$.
$N_n = M_n^2 - [M]_n$. La ricorsione diventa:
$$[M]_n = [M]_{n-1} + \mathbb{E}[M_n^2 - M_{n-1}^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] =$$
$$= [M]_{n-1} + \mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] =$$
$$= \dots = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}].$$
S t.d.a. lim. $\Rightarrow \mathbb{E}[M_S^2] = \mathbb{E}[M_0^2] + \mathbb{E}[[M]_S]$.

Oss.: $(H_n)_{n=0}^T$ è prevedibile e limitato, $(H\cdot M)_{n=0}^T$.
Es.: $H_n = \mathbb{1}_{\{S>n-1\}}$, $(H\cdot M)_n = M_{S\wedge n}$.
$$[H\cdot M]_n = [H\cdot M]_{n-1} + \mathbb{E}[((H\cdot M)_n - (H\cdot M)_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] =$$
$$= [H\cdot M]_{n-1} + \mathbb{E}[H_n^2 (M_n - M_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] =$$
$$= [H\cdot M]_{n-1} + H_n^2([M]_n - [M]_{n-1}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} H_k^2([M]_k - [M]_{k-1}).$$
In particolare, $\mathbb{E}[(H\cdot M)_T^2] =$
$$= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{T} H_k^2([M]_k - [M]_{k-1})\Big]. \quad (\star)$$
Nel caso continuo sarà detta isometria di Itô.

Dato $(H_n)_{n=0}^T$ prevedibile e lim. definiamo una norma
$$\|H\|^2_{\mathcal{L}^2(M)} = \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{T} H_k^2([M]_k - [M]_{k-1})\Big].$$
$\mathcal{L}^2(M) \ni H \longmapsto (H\cdot M)_T \in L^2(\mathbb{P})$, per cui $(\star)$ è isometria.
Usando Doob in L^2:
$$\mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq n\leq T}(H\cdot M)_n^2\Big]^{1/2} \leq 2\,\mathbb{E}[(H\cdot M)_T^2]^{1/2} = 2\|H\|_{\mathcal{L}^2(M)}.$$
Domanda: e se invece di 2 prendo altri esponenti $p>1$?
Disuguaglianze di Burkholder-Davis-Gundy:
$(M_n)_{n=0}^T$ mart. a quadrato integrabile $\Rightarrow \forall p>1\ \exists c_p > 0$ t.c.
$$c_p^{-1}\mathbb{E}\big[[M]_T^{p/2}\big]^{1/p} \leq \mathbb{E}\Big[\sup_{0\leq n\leq T}|M_n|^p\Big]^{1/2} \leq c_p\,\mathbb{E}\big[[M]_T^{p/2}\big]^{1/p}.$$
Es.: se $M_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ indi., centrate, di quadrato integrabile $\Rightarrow$
$\Rightarrow [M]_n = [M]_{n-1} + \mathbb{E}[Z_n^2] = [M]_{n-1} + \mathrm{Var}(Z_n) =$
$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(Z_i)$.

Es.: $p=4$, vogliamo $c\,\mathbb{E}[M_T^4] \geq \mathbb{E}[[M]_T^2]$.
$[M]_T^2 = ([M]_T - M_T^2 + M_T^2)^2 = (N_T + M_T^2)^2 \leq$
$\leq 2N_T^2 + 2M_T^4$. Ci basta: $\mathbb{E}[N_T^2] \leq c\,\mathbb{E}[M_T^4]$.
$\mathbb{E}[N_T^2] = \mathbb{E}[[N]_T] + \mathbb{E}[M_0^4]$.
$[N]_n = [N]_{n-1} + \mathbb{E}[(N_n - N_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}]$.
$N_n - N_{n-1} = M_n^2 - [M]_n - M_{n-1}^2 + [M]_{n-1} =$
$= (M_n^2 - M_{n-1}^2) - ([M]_n - [M]_{n-1}) \Rightarrow$
$\Rightarrow (N_n - N_{n-1})^2 = (M_n^2 - M_{n-1}^2)^2 + ([M]_n - [M]_{n-1})^2 +$
$-2(M_n^2 - M_{n-1}^2)([M]_n - [M]_{n-1}) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{E}[(N_n - N_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] =$
$= \mathbb{E}[(M_n^2 - M_{n-1}^2)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] + ([M]_n - [M]_{n-1})^2 +$
$-2\,\mathbb{E}[\underset{\substack{\| \\ (N_n + [M]_n) - (N_{n-1} + [M]_{n-1})}}{M_n^2 - M_{n-1}^2} \mid \mathcal{F}_{n-1}]([M]_n - [M]_{n-1}) =$
$= \mathbb{E}[(M_n^2 - M_{n-1}^2)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] - ([M]_n - [M]_{n-1})^2$.
$\mathbb{E}[(M_n^2 - M_{n-1}^2)^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[M_n^4 \mid \mathcal{F}_{n-1}] + M_{n-1}^4 - 2\,\mathbb{E}[\underset{\substack{\| \\ N_n + [M]_n}}{M_n^2} \mid \mathcal{F}_{n-1}]M_{n-1}^2 =$
$= \mathbb{E}[M_n^4 \mid \mathcal{F}_{n-1}] - M_{n-1}^4 - 2([M]_n - [M]_{n-1})M_{n-1}^2 \leq$
$\leq \mathbb{E}[M_n^4 \mid \mathcal{F}_{n-1}] - M_{n-1}^4$.
$[N]_n - [N]_{n-1} \leq \mathbb{E}[M_n^4 \mid \mathcal{F}_{n-1}] - M_{n-1}^4 \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{E}[[N]_T] = \sum_{n=0}^{T} \mathbb{E}[[N]_n - [N]_{n-1}] \leq$
$\leq \sum_{n=0}^{T}(\mathbb{E}[M_n^4] - \mathbb{E}[M_{n-1}^4]) = \mathbb{E}[M_T^4]$.