Obiettivo: definire $\int_0^t H_s\,dM_s$, $(M_s)_s$ mart..

Ostacolo: $(M_s)_s$ non è a variazione finita $\Rightarrow$ non applichiamo la teoria di Riemann-Stieltjes/Lebesgue.

Ipotesi: $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$, $\mathcal{F}_0$ contiene gli A trascurabili $\in \mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t \Rightarrow$
$\Rightarrow$ se $(H^n_s)_{s\geq 0}$ adattati, $H^n_s \to H^\infty_s$, anche H^∞ è adattato,
" " progr. mis., " , " " " progr. mis..

Def.: un processo $(A_s)_{s\geq 0}$ è crescente se $\mathbb{P}$-q.c. le traiettorie sono crescenti e cont. a dx. È a variazione finita se $\mathbb{P}$-q.c. le traiettorie sono a variazione finita.

Oss.: cont. + adattato $\Rightarrow$ progr. mis.; allora, se A è anche a var. finita, $A_t = \underbrace{A^+_t - A^-_t}_{\text{crescenti}} \Rightarrow$ l'integrale di Riemann-Stieltjes è definito traiettoria per traiettoria per $(H_s)_{s\geq 0}$, $|H_s| \leq C$ $\forall s \in [0,t]$:
$$\int_0^t H_s\,dA_s = \int_0^t H_s\,dA^+_s - \int_0^t H_s\,dA^-_s \quad (dA^\pm((s,t]) = A^\pm_t - A^\pm_s).$$
Gli integrandi sono proc. progr. mis. se $(H_s)_{s\geq 0}, (A_s)_{s\geq 0}$ lo sono.

Notazione: $\int_0^t H_s\,dA_s = (H\cdot A)_t$.

⌈Young (1936): se $f \in C^\alpha([0,t])$, $g \in C^\beta([0,t])$ allora è ben def.
$$\int_0^t f_s\,dg_s = \lim_{|\Delta^n|\to 0} \sum_{i=1}^n f_{t_i}(g_{t_i} - g_{t_{i-1}}) \quad \text{purché } \alpha+\beta > 1.$$
Problema: se $f = g = BM \in C^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ $\forall \varepsilon > 0$, $\alpha+\beta < 1.$⌋

Idea: per costruire $\int_0^t H_s\,dM_s$ quando $(M_s)_{s\geq 0}$ è mart. ci appoggiamo a una proprietà di isometria che permetta di passare al limite le stime di Riemann.

Ricordiamo: X a var. quadratica finita se... cose. Nella def. di T^Δ_t, occhio al caso $t_k < t < t_{k+1}$ (faccio la somma fino a t_k, poi ci aggiungo il pezzo da t_k a t).

Teo.: sia M una mart. cont. e lim. ($|M_t(\omega)| \leq C$). Allora:
i) M ha var. quadratica finita $(\langle M\rangle_t)_{t\geq 0}$;
ii) il processo $\langle M\rangle$ è l'unico processo crescente, cont., adattato, nullo in 0 e t.c. $M^2_t - \langle M\rangle_t$ è mart..

Lemma: se M è mart. cont. e a var. finita allora è cost. $\mathbb{P}$-q.c..

Dim. (del lemma): WLOG $M_0 = 0$. $\mathrm{Var}(M)_t$ è progr. mis. (cont. e adattato).
Dato n poniamo $T_n = \inf\{t \mid \mathrm{Var}(M)_t \geq n\}$ e $T_n \uparrow +\infty$ per $n \to +\infty$. Il processo $(M^T)_t = M_{T\wedge t}$ è mart. nulla in 0 e $|M^T_t| \leq n$ $\forall t$. Sia $\Delta = \{0 = t_0 < \ldots < t_k = t\}$. Allora $(M^T_{t_i})_{i=0}^k$ è mart. t.c. $\mathbb{E}[(M^T_t)^2] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^k (M^T_{t_i} - M^T_{t_{i-1}})^2\right] \leq$
$\leq \mathbb{E}\left[\sup_i |M^T_{t_i} - M^T_{t_{i-1}}| \sum_{i=1}^n |M^T_{t_i} - M^T_{t_{i-1}}|\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_i |M^T_{t_i} - M^T_{t_{i-1}}| \cdot n\right]$.
Se $|\Delta| \to 0$, $\sup_i |M^T_{t_i} - M^T_{t_{i-1}}| \to 0$, con. dom. $\Rightarrow \mathbb{E}[(M^T_t)^2] = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow M^T_t = 0$ $\mathbb{P}$-q.c., $T = T_n \to +\infty \Rightarrow M_t = 0$ $\mathbb{P}$-q.c.. $\square$

Dim. (del teo.): unicità in ii): $M^2_t - A_t = N_t$, $M^2_t - A'_t = N'_t$ mart. cont. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \underbrace{A'_t - A_t}_{\text{a var. finita}} = \underbrace{N_t - N'_t}_{\text{mart. cont.}} \Rightarrow N_t - N'_t = 0$, $A_t - A'_t = 0$.

Esistenza: notazione: $T^\Delta_t(M) = T^\Delta_t$.

1) $M^2_t - T^\Delta_t$ è mart.: $s < t$, $t_l < s < t_{l+1}$, $t_k < t < t_{k+1}$.
$\mathbb{E}[M^2_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(M_t - M_s + M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s] + M^2_s =$
$= M^2_s + \mathbb{E}\left[(M_{t_{l+1}} - M_s)^2 + \sum_{i=l+2}^k (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 + (M_t - M_{t_k})^2 \mid \mathcal{F}_s\right]$.
$\mathbb{E}[T^\Delta_t \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[(M_t - M_{t_k})^2 + \sum_{i=l+2}^k (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 + (M_{t_{l+1}} - M_{t_l})^2 \mid \mathcal{F}_s\right] +$
$$\underbrace{+ \sum_{i=1}^l (M_{t_{i-1}} - M_{t_{i-1}})^2 + (M_s - M_{t_l})^2}_{T^\Delta_s} - (M_s - M_{t_l})^2.$$
Si fa la differenza e torna (conti).

2) Siano $\Delta, \Delta' \subseteq [0, +\infty)$ partizioni finite. Obiettivo: stimare $\mathbb{E}[|T^\Delta_a - T^{\Delta'}_a|^2]$, a fissato, WLOG $a \in \Delta \cap \Delta'$. Poniamo $\Delta\Delta' = \Delta \cup \Delta'$. $X_a = T^\Delta_a - T^{\Delta'}_a$. $X_t = T^\Delta_t - M^2_t + M^2_t - T^{\Delta'}_t$ è mart..
$$\mathbb{E}[X^2_a] \underset{\substack{a = s_k,\\ \{s_i\}_{i=0}^k = \Delta\Delta'}}{=} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^k (X_{s_i} - X_{s_{i-1}})\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^k (X_{s_i} - X_{s_{i-1}})^2\right] = \mathbb{E}[T^{\Delta\Delta'}_a(X)].$$
Oss.: $T^\Delta_t(A+B) \leq 2T^\Delta_t(A) + 2T^\Delta_t(B)$.
$\mathbb{E}[T^{\Delta\Delta'}_a(X)] \leq 2\mathbb{E}[T^{\Delta\Delta'}_a(T^\Delta(M))] + 2\mathbb{E}[T^{\Delta\Delta'}_a(T^{\Delta'}(M))]$.

3) $\mathbb{E}[T^{\Delta\Delta'}_a(T^\Delta(M))] \to 0$ se $\max\{|\Delta|, |\Delta'|\} \to 0$.
$t_l, t_{l+1} \in \Delta$, s_k il più piccolo in $\Delta\Delta'$ $\geq t_l \Rightarrow t_l \leq s_k < s_{k+1} \leq t_{l+1}$.
$$T^\Delta(M)_{s_{k+1}} - T^\Delta(M)_{s_k} = \sum_{i=1}^l (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 + (M_{s_{k+1}} - M_{t_l})^2 + - \sum_{i=1}^l (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 - (M_{s_k} - M_{t_l})^2 =$$
$= (M_{s_{k+1}} - M_{t_l})^2 - (M_{s_k} - M_{t_l})^2 =$
$= (M_{s_{k+1}} - M_{t_l} + M_{s_k} - M_{t_l})(M_{s_{k+1}} - M_{s_k})$.
$$T^{\Delta\Delta'}_a(T^\Delta(M)) \underset{s_m = a}{=} \sum_{j=0}^{m-1} (M_{s_{j+1}} + M_{s_j} - 2M_{t_{l(j)}})^2 (M_{s_{j+1}} - M_{s_j})^2.$$
$$\mathbb{E}[T^{\Delta\Delta'}_a(T^\Delta(M))] \leq \mathbb{E}\left[\left(\sup_j |M_{s_{j+1}} + M_{s_j} - 2M_{t_{l(j)}}|\right)^2 \underbrace{\sum_{j=0}^{m-1} (M_{s_{j+1}} - M_{s_j})^2}_{= T^{\Delta\Delta'}_a(M)}\right] \underset{CS}{\leq}$$
$$\leq \mathbb{E}\left[\left(\sup_j |M_{s_{j+1}} + M_{s_j} - 2M_{t_{l(j)}}|\right)^4\right]^{1/2} \mathbb{E}[(T^{\Delta\Delta'}_a(M))^2]^{1/2}.$$
Il fattore di sx $\to 0$ per con. dom. per $|\Delta|, |\Delta'| \to 0$.

4) $\mathbb{E}[(T^{\Delta\Delta'}_a(M))^2] \lesssim C^4$: indi. da Δ e Δ' $\Delta\Delta' \rightsquigarrow \Delta = \{0 = t_0 < \ldots < t_m = a\}$ per semplicità. $\mathbb{E}[(T^\Delta_a(M))^2] \leq$
$$\leq 2\mathbb{E}[(T^\Delta_a - M^2_a)^2] + 2\mathbb{E}[\underset{C^4}{\underset{\wedge\!\!\shortparallel}{M^4_a}}].$$
$$M^2_a = \sum_{i,j=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(M_{t_j} - M_{t_{j-1}}),$$
$$M^2_a - T^\Delta_a(M) = 2\sum_{i<j} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(M_{t_j} - M_{t_{j-1}}) =$$
$$= 2\sum_{j=1}^n (M_{t_j} - M_{t_{j-1}})\underbrace{(M_{t_{j-1}} - M_0)}_{H}.$$
$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^n H_{t_{j-1}}(M_{t_j} - M_{t_{j-1}})\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n H^2_{t_{j-1}}(M_{t_j} - M_{t_{j-1}})^2\right] \leq$$
$$\leq 4C^2\,\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^n (M_{t_j} - M_{t_{j-1}})^2\right] = 4C^2\,\mathbb{E}[(M_a - M_0)^2] \leq 16C^4.$$

5) $\forall a$ $T^{\Delta_n}_a(M)$ è di Cauchy in L^2 se $|\Delta_n| \to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} T^{\Delta_n}_a(M) = \langle M\rangle_a$. Per Doob,
$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq a} |T^{\Delta_n}_t - T^{\Delta_m}_t|^2\right] \leq 4\mathbb{E}[|T^{\Delta_n}_a - T^{\Delta_m}_a|^2] \Rightarrow$
$\Rightarrow \langle M\rangle_t$ ammette versione cont..
$M^2_t - T^{\Delta_n}_t(M)$ mart. $\overset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} M^2_t - \langle M\rangle_t$ mart..
Se $s < t$ razionali diadici, $T^{\Delta_n}_t \geq T^{\Delta_n}_s \Rightarrow \langle M\rangle_t \geq \langle M\rangle_s$. $\square$