Oss.: • $T_t^\Delta(M)$ non sono crescenti né a var finita, ma se $s, t \in \Delta$, $s \leq t$, allora $T_s^\Delta \leq T_t^\Delta$;

• nello step 3 dell'ultima dim. della volta scorsa, prima si fissa s_k e poi si sceglie t_l;

• nello step 5, bisogna prestare attenzione per la conv. unif..

Prop.: sia M mart. cont. e lim. e T t.d.a.. Allora $\langle M^T \rangle = \langle M \rangle^T$.

Dim.: $N_t = M_t^2 - \langle M \rangle_t$ è mart.. $N_t^T = N_{T\wedge t} = M_{T\wedge t}^2 - \langle M \rangle_{T\wedge t} =$
$= (M^T)_t^2 - \langle M \rangle_t^T$ è mart. $\Longrightarrow$ per unicità dal teo.,
$\langle M \rangle^T = \langle M^T \rangle$. ↳crescente, cont., adattato, nullo in 0 □

Def.: un processo adattato $(X_t)_{t\geq 0}$ e cont. a dx è una <u>mart. locale</u> (rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}$) se $\exists$ t.d.a. $(T_n)_{n=1}^{+\infty}$ lim. t.c.:

i) $T_n \uparrow +\infty$ $\mathbb{P}$-q.c.;

ii) $X^{T_n} \cdot \mathbb{1}_{\{T_n > 0\}}$ è mart. unif. integrabile.

Oss.: • X mart. unif. integrabile $\Rightarrow$ mart. locale;

• se X cont., possiamo imporre che $X^{T_n} \cdot \mathbb{1}_{\{T_n>0\}}$ sia mart. lim. introducendo $S_n = \min\{T_n, \inf\{t \mid |X_t| \geq n\}\}$ (se $n \to +\infty$, $S_n \uparrow +\infty$);

• il BM è mart. locale con $T_n = n$.

Teo.: se M è mart. locale cont., $\exists!$ processo $\langle M \rangle$ cont., crescente, adattato, nullo in 0 t.c. $M^2 - \langle M \rangle$ sia mart. locale cont..
Inoltre, $\forall t$ e $(\Delta_n)_n$ partizioni di $[0,t]$ si ha
$\sup_{0\leq s\leq t} |T_s^{\Delta_n}(M) - \langle M \rangle_s| \longrightarrow 0$ in prob. se $|\Delta_n| \longrightarrow 0$.

Dim.: l'unicità segue dal lemma dell'altra volta applicato a $M^{T_n} \cdot \mathbb{1}_{\{T_n>0\}}$.
Esistenza: consideriamo la mart. locale $M - M_0 \rightsquigarrow$ WLOG $M_0 = 0$.
Abbiamo t.d.a. T_n t.c. M^{T_n} è unif. lim. $\Rightarrow \langle M^{T_n} \rangle$.
$T_{n+1} \geq T_n \Rightarrow \langle M^{T_{n+1}} \rangle^{T_n} = \langle M^{T_{n+1} \wedge T_n} \rangle = \langle M^{T_n} \rangle \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall t$ definisco $\langle M \rangle_t := \lim_{n\to+\infty} \langle M^{T_n} \rangle_t$.
Verifichiamo che $M^2 - \langle M \rangle$ è mart. locale (con gli stessi T_n):
$(M^2 - \langle M \rangle)^{T_n} = (M^{T_n})^2 - \langle M^{T_n} \rangle$ è mart. lim..
Convergenza in prob.: no dim.. □

Teo. (covariazione quadratica): date M, N mart. loc. $\exists!$ proc. cont., adattato, nullo in 0, a var. finita $\langle M, N \rangle$ t.c. $MN - \langle M, N \rangle$ è mart. loc. cont.. Si ha
$$\sum_{t_i \in \Delta([0,t])} (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(N_{t_i} - N_{t_{i-1}}) \longrightarrow \langle M, N \rangle_t \text{ in prob..}$$

Dim.: $\langle M, N \rangle := \dfrac{\langle M+N, M+N \rangle - \langle M \rangle - \langle N \rangle}{2}$. □

Ex.: X, Y mart. loc. $\Rightarrow X+Y$ mart. loc..

Prop.: date M, N mart. loc. cont., $(H_s)_{s\geq 0}, (K_s)_{s\geq 0}$ proc. (mis.), allora $\int_0^t |H_s||K_s| \, d\mathrm{Var}_1(\langle M, N \rangle)_s \leq \left(\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s\right)^{1/2} \left(\int_0^t K_s^2 d\langle N \rangle_s\right)^{1/2}$ $\mathbb{P}$-q.c..

Teo. (Kunita-Watanabe):
$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |H_s||K_s| \, d\mathrm{Var}_1(\langle M, N \rangle)_s\right] \leq$$
$$\leq \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s\right]^{1/2} \mathbb{E}\left[\int_0^t K_s^2 d\langle N \rangle_s\right]^{1/2}.$$

Dim. (della prop.): $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle M + \lambda N \rangle = \langle M \rangle + \lambda^2 \langle N \rangle + 2\lambda \langle M, N \rangle$
crescente $\Rightarrow \forall s < t$ $\langle M + \lambda N \rangle_t - \langle M + \lambda N \rangle_s =$
$= (\langle M \rangle_t - \langle M \rangle_s) + \lambda^2 (\langle N \rangle_t - \langle N \rangle_s) + 2\lambda(\langle M, N \rangle_t - \langle M, N \rangle_s) \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow |\langle M, N \rangle_t - \langle M, N \rangle_s| \leq \sqrt{(\langle M \rangle_t - \langle M \rangle_s)(\langle N \rangle_t - \langle N \rangle_s)}$.
$|\langle M, N \rangle_t - \langle M, N \rangle_s| \leq \frac{\alpha^2}{2}(\langle M \rangle_t - \langle M \rangle_s) + \frac{\alpha^{-2}}{2}(\langle N \rangle_t - \langle N \rangle_s) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathrm{Var}_1(\langle M, N \rangle)_t - \mathrm{Var}_1(\langle M, N \rangle)_s \leq$
$\leq \frac{\alpha^2}{2}(\langle M \rangle_t - \langle M \rangle_s) + \frac{\alpha^{-2}}{2}(\langle N \rangle_t - \langle N \rangle_s)$.
Per densità ci limitiamo a H, K processi elementari:
$H = \sum_{i=1}^n H_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}]}$, K analogo.
$\int_0^t |H_s K_s| \, d\mathrm{Var}_1(\langle M, N \rangle)_s = \sum_i |H_{t_i} K_{t_i}| (\mathrm{Var}_1(\langle M, N \rangle)_{t_{i+1}} - \mathrm{Var}_1(\langle M, N \rangle)_{t_i}) \leq$
$\leq \sum_i |H_{t_i} K_{t_i}| \sqrt{(\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i})(\langle N \rangle_{t_{i+1}} - \langle N \rangle_{t_i})} \overset{CS}{\leq}$
$\leq \left(\sum_i |H_{t_i}|^2 (\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i})\right)^{1/2} \cdot$
$\cdot \left(\sum_i |K_{t_i}|^2 (\langle K \rangle_{t_{i+1}} - \langle K \rangle_{t_i})\right)^{1/2}$. □

Def.: un processo X è detto <u>semimart.</u> cont. (rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ e $\mathbb{P}$) se $X = M + A$ dove M è mart. loc. cont. e A è cont., adattato e a var. finita.

Oss.: $X = M + A = M' + A' \Rightarrow M - M' = A' - A \Rightarrow M_t - M'_t = M_0 - M'_0$ $\mathcal{F}_0$-mis..

Prop.: una semimart. cont. ammette var. quadratica pari a quella di M, cioè $\langle X \rangle = \langle M \rangle$.

Dim.: Δ partizione di $[0,t]$. $T_t^\Delta(X) = \sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 =$
$= \sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 + \sum_{i=1}^n (A_{t_i} - A_{t_{i-1}})^2 + 2\sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(A_{t_i} - A_{t_{i-1}})$.
$\sum_{i=1}^n |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}| \to \mathrm{Var}_1(A)_t$,
$\sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \to \langle M \rangle_t$. $(|\Delta| \longrightarrow 0)$
Allora $\sum_{i=1}^n (A_{t_i} - A_{t_{i-1}})^2 \leq \big(\underbrace{\sup_{i=1,\dots,n} |A_{t_i} - A_{t_{i-1}}|}_{\to 0}\big) \mathrm{Var}_1(A)_t$.
$2\sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(A_{t_i} - A_{t_{i-1}}) \leq \left(\sum_{i=1}^n (A_{t_i} - A_{t_{i-1}})^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2\right)^{1/2} \to$
$\longrightarrow 0 \cdot \sqrt{\langle M \rangle_t} = 0$. □

Def.: se $X = M + A$, $Y = N + B$, allora si ha $\langle X, Y \rangle = \langle A, B \rangle$.

Def.: si definiscono gli spazi $\mathbb{H}^2 = \{(M_t)_{t\geq 0} \text{ mart.} \mid \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[M_t^2] < +\infty\}$,
$H^2 = \{M \in \mathbb{H}^2 \text{ cont.}\}$, $H_0^2 = \{M \in H^2 \mid M_0 = 0\}$.

Oss.: $\mathbb{H}^2 \longleftrightarrow L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$. $\|X\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[M_t^2]^{1/2}$.
$(M_t)_{t\geq 0} \mapsto X = \lim_{t\to+\infty} M_t$
$M_t = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t] \longleftarrow X$
$\mathbb{H}^2$ munito della norma $\|M\|_{\mathbb{H}^2} = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[M_t^2]^{1/2}$ è uno spazio di Hilbert.

H^2 è un sottospazio chiuso di $\mathbb{H}^2$ per Doob.

Prop.: $\|M\|_{\mathbb{H}^2}^2 \overset{(*)}{=} \mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty] + \mathbb{E}[M_0^2]$.
Una mart. loc. cont. M è in $\mathbb{H}^2$ se e solo se:

i) $M_0 \in L^2$;

ii) $\mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty] = \sup_t \mathbb{E}[\langle M \rangle_t] < +\infty$;

iii) $(*)$

Dim.: $T_n \uparrow +\infty$ t.d.a. t.c. $M^{T_n} \cdot \mathbb{1}_{\{T_n>0\}}$ sia lim. e mart..
$\mathbb{E}[(M_t^{T_n} \cdot \mathbb{1}_{\{T_n>0\}})^2] = \mathbb{E}[((M_t^{T_n})^2 - \langle M^{T_n} \rangle_t) \cdot \mathbb{1}_{\{T_n>0\}}] +$
$+ \mathbb{E}[\langle M \rangle_t^{T_n} \cdot \mathbb{1}_{\{T_n>0\}}] = \mathbb{E}[M_0^2 \cdot \mathbb{1}_{\{T_n>0\}}] + \mathbb{E}[\langle M \rangle_t^{T_n} \cdot \mathbb{1}_{\{T_n>0\}}]$.
Se valgono (i) e (ii) per $n \to +\infty$,
$\mathrm{RHS} \to \mathbb{E}[M_0^2] + \mathbb{E}[\langle M \rangle_t] \leq \mathbb{E}[M_0^2] + \sup_t \mathbb{E}[\langle M \rangle_t]$,
$\liminf \mathrm{LHS} \underset{\text{Fatou}}{\geq} \mathbb{E}[M_t^2]$.
Non verifichiamo che è mart.. Neanche il resto. □

Cor.: se $M \in H_0^2$ allora $\sup_t \mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty]^{1/2}$.