Il teo. della volta scorsa è, in particolare, un'isometria $L^2(M) \ni K \mapsto K \cdot M \in H^2_0$.

Oss.: $K \cdot M = K \cdot (M - M_0)$.

Vale l'isometria perché $\langle K \cdot M \rangle = \langle K \cdot M, K \cdot M \rangle = K \cdot \langle M, K \cdot M \rangle =$
$= K \cdot (\langle K \cdot M, M \rangle) = K \cdot (K \cdot \langle M, M \rangle)$.

Proprietà dell'integrale iterato di R.-S.: $(k \cdot (h \cdot f))_t =$
$= \int_0^t k_s \, d\left( \int_0^s h_r \, df_r \right) = \int_0^t k_s h_s \, df_s \Rightarrow K \cdot (K \cdot \langle M, M \rangle) = K^2 \cdot \langle M \rangle \Rightarrow$
$\Rightarrow \|K \cdot M\|^2_{H^2} = \mathbb{E}[\langle K \cdot M \rangle_\infty] = \mathbb{E}\left[ \int_0^{+\infty} K_s^2 \, d\langle M \rangle_s \right] = \|K\|^2_{\mathcal{L}^2(M)}$.

Cor.: $K_n \to K$ in $L^2(M) \Rightarrow K_n \cdot M \to K \cdot M$ in $H^2$.

## Proprietà

Prop.: se $M \in H^2$, $K \in \mathcal{L}^2(M)$, $H \in \mathcal{L}^2(K \cdot M)$, allora
$H \cdot (K \cdot M) = (HK) \cdot M$ (in particolare, $HK \in \mathcal{L}^2(M)$).

Dim.: $\mathbb{E}\left[ \int_0^{+\infty} (H_s K_s)^2 \, d\langle M \rangle_s \right] = \mathbb{E}\left[ ((H^2 K^2) \cdot \langle M \rangle)_\infty \right] =$
$= \mathbb{E}\left[ (H^2 \cdot (K^2 \cdot \langle M \rangle))_\infty \right] = \mathbb{E}\left[ (H^2 \cdot (\langle K \cdot M \rangle))_\infty \right] =$
$= \|H\|^2_{\mathcal{L}^2(K \cdot M)} < +\infty \Rightarrow HK \in \mathcal{L}^2(M)$.
$N \in H^2$. $\langle H \cdot (K \cdot M), N \rangle \overset{?}{=} (HK) \cdot \langle M, N \rangle$.
$LHS = H \cdot \langle K \cdot M, N \rangle = H \cdot (K \cdot \langle M, N \rangle) = (HK) \cdot \langle M, N \rangle$. □

Prop.: siano $M \in H^2_0$, $T$ t.d.a.. Allora $M^T = \mathbb{1}_{[0,T]} \cdot M$ (in particolare, $K_s(\omega) = \mathbb{1}_{[0,T(\omega)]}(s)$ è in $\mathcal{L}^2(M)$).

Dim.: $\|\mathbb{1}_{[0,T]}\|^2_{\mathcal{L}^2(M)} = \mathbb{E}\left[ (\mathbb{1}^2_{[0,T]} \cdot \langle M \rangle)_\infty \right] = \mathbb{E}\left[ \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,T]}(s) \, d\langle M \rangle_s \right] \leq$
$\leq \mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty] < +\infty$.
$N \in H^2$. $\langle M^T, N \rangle \overset{?}{=} \mathbb{1}_{[0,T]} \cdot \langle M, N \rangle$.
$(LHS)_s = \langle M, N \rangle_s^T = \int_0^{T \wedge s} d\langle M, N \rangle_r = \int_0^s \mathbb{1}_{[0,T]}(r) \, d\langle M, N \rangle_r = (RHS)_s$. □

Cor.: $M \in H^2$, $T$ t.d.a., $K \in \mathcal{L}^2(M)$, allora
$(K \cdot M)^T = (K \mathbb{1}_{[0,T]}) \cdot M = K \cdot M^T$.

Dim.: ex.. □

Def.: se $M$ è mart. loc. cont., un processo $(K_s)_{s \geq 0}$ è detto in $\mathcal{L}^2_{loc}(M)$ se: ·) è progr. mis.;
·) $\exists (T_n)_n$ t.d.a., $T_n \uparrow +\infty$ t.c. $K \mathbb{1}_{[0,T_n]} \in \mathcal{L}^2(M)$, ossia $\mathbb{E}\left[ \int_0^{T_n} K_s^2 \, d\langle M \rangle_s \right] < +\infty$.

Equivalentemente, basta chiedere $\forall t \int_0^t K_s^2 \, d\langle M \rangle_s < +\infty$ $\mathbb{P}$-q.c..
" , si può chiedere $\int_0^{T_n} K_s^2 \, d\langle M \rangle_s \leq n$ $\mathbb{P}$-q.c..

Prop.: sia $M$ mart. loc. cont., $K \in \mathcal{L}^2_{loc}(M)$, allora $\exists!$ mart. loc. cont. nulla in 0 $(K \cdot M)_t = \int_0^t K_s \, dM_s$ t.c. $\forall N$ mart. loc. cont. $\langle K \cdot M, N \rangle = K \cdot \langle M, N \rangle$.
$\hookrightarrow$ ben def. usando t.d.a.

Dim.: $\exists T_n$ t.d.a. t.c. $M^{T_n} \mathbb{1}_{\{T_n > 0\}}$ è mart. lim. e $K \mathbb{1}_{[0,T_n]} \in L^2(M^{T_n})$.
WLOG $M_0 = 0 \Rightarrow M^{T_n} \mathbb{1}_{\{T_n > 0\}} = M^{T_n} \Rightarrow$
$\Rightarrow (K \mathbb{1}_{[0,T_n]}) \cdot M^{T_n}$ è mart. in $H^2_0$.
$m \geq n \Rightarrow T_m \geq T_n$, $((K \mathbb{1}_{[0,T_m]}) \cdot M^{T_m})^{T_n} = (K \mathbb{1}_{[0,T_n]}) \cdot M^{T_n}$ $\mathbb{P}$-q.c. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ è ben def. $(K \cdot M)_s = \lim_{m \to +\infty} ((K \mathbb{1}_{[0,T_m]}) \cdot M^{T_m})_s$.
Data $N$ mart. in $H^2$, $\forall m$ $\langle (K \mathbb{1}_{[0,T_m]}) \cdot M^{T_m}, N \rangle =$
$= (K \mathbb{1}_{[0,T_m]}) \cdot \langle M^{T_m}, N \rangle = (K \mathbb{1}_{[0,T_m]}) \cdot \langle M, N \rangle^{T_m} =$
$= K \cdot \langle M, N \rangle^{T_m} = (K \cdot \langle M, N \rangle)^{T_m}$.
$LHS = \langle (K \cdot M)^{T_m}, N \rangle = \langle K \cdot M, N \rangle^{T_m}$ e si conclude perché $T_m \to +\infty$. □

Conseguenza: abbiamo $\int_0^t H_s \, dB_s$ se $(B_s)_{s \geq 0}$ è BM e $(H_s)_{s \geq 0} \in \mathcal{L}^2_{loc}(B)$, ossia $\forall t \int_0^t H_s^2 \, ds < +\infty$ $\mathbb{P}$-q.c. e $H$ è progr. mis..

Es.: $H_s = B_s$, $\mathbb{E}\left[ \int_0^t B_s^2 \, ds \right] = \int_0^t s \, ds = \frac{t^2}{2}$.

Ex.: $\int_0^t B_s \, dB_s$ è mart..

Def.: $(K_s)_{s \geq 0}$ è localmente limitato se $\exists (T_n)_n$ t.d.a. t.c. $T_n \uparrow +\infty$ e $c_n < +\infty$ t.c. $|K^{T_n}| \leq c_n$ $\mathbb{P}$-q.c..

Def.: sia $X = M + A$ semimart. cont., $K$ progr. mis. e loc. lim..
$K \cdot M$ e $K \cdot A$ sono ben def. e si pone $K \cdot X = K \cdot M + K \cdot A$.

Prop.: $K$, $H$ loc. lim. e progr. mis., $X$, $Y$ semimart.. Allora:
$K \cdot (X + Y) = (K \cdot X) + (K \cdot Y)$; $(K + H) \cdot X = (K \cdot X) + (H \cdot X)$;
$(KH) \cdot X = K \cdot (H \cdot X)$; $(K \cdot X)^T = (K \mathbb{1}_{[0,T]}) \cdot X = K \cdot X^T$, $T$ t.d.a.;
$K \cdot X$ è semimart. cont. e vale
$\langle K \cdot X, H \cdot Y \rangle = \langle K \cdot M^X, H \cdot M^Y \rangle = (KH) \cdot \langle M^X, M^Y \rangle = (KH) \langle X, Y \rangle$.

Dim.: ex.. □

Teo.: sia $X$ semimart. cont., $(K^n)_n$, $K^\infty$ progr. mis. e t.c. $\exists c_m$ cost. e $T_m$ t.d.a. t.c. $|(K^n)^{T_m}| \leq c_m$ $\mathbb{P}$-q.c. $\forall n \forall m$ e $\lim_{n \to +\infty} K^n_s(\omega) = K^\infty_s(\omega)$. Allora $K^n \cdot X \to K^\infty \cdot X$ unif. su ogni intervallo lim. e in prob. ($\mathbb{P}(\sup_{0 \leq s \leq t} |(K^n \cdot X)_s - (K^\infty \cdot X)_s| > \varepsilon) \to 0$ per $n \to +\infty$ $\forall \varepsilon > 0$ $\forall t$).

Dim.: $X = M + A$. $K^n \cdot A \to K^\infty \cdot A$ per con. dom. "deterministico" applicato a ogni $\omega \in \Omega$.
Supponiamo $K^\infty = 0$, vogliamo $K^n \cdot M \to 0$. A meno di introdurre t.d.a. possiamo supporre $M$ mart. lim. e $K^n$ unif. lim., $|K^n| \leq c$.
$K^n \in \mathcal{L}^2(M)$ perché $\mathbb{E}\left[ \int_0^{+\infty} (K^n_s)^2 \, d\langle M \rangle_s \right] \leq c^2 \mathbb{E}[\langle M \rangle_\infty] \leq$
$\leq c^2 \|M\|^2_{H^2} \Rightarrow$ (isometria di Itô) $\|K^n \cdot M\|_{H^2} = \|K^n\|_{\mathcal{L}^2(M)}$.
$\int_0^{+\infty} (K^n_s)^2 \, d\langle M \rangle_s \to 0$ per con. dom. ($\mu = d\langle M \rangle$ è finita $\tilde{\forall} \omega$).
$\int_0^{+\infty} (K^n_s)^2 \, d\langle M \rangle_s \leq c^2 \langle M \rangle_\infty$. Con. dom. applicato a $\mathbb{E} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{E}\left[ \int_0^{+\infty} (K^n_s)^2 \, d\langle M \rangle_s \right] \to 0 \Rightarrow \|K^n \cdot M\|_{H^2} \to 0$.
Doob $\Rightarrow$ $\mathbb{E}\left[ \sup_{s \geq 0} |(K^n \cdot M)_s|^2 \right]^{1/2} \leq 2 \sup_{s \geq 0} \mathbb{E}\left[ |(K^n \cdot M)_s|^2 \right]^{1/2} = 2 \|K^n \cdot M\|_{H^2}$.
Non vediamo i dettagli per liberarci dei t.d.a.. □

Cor.: se $(K_s)_{s \geq 0}$ cont. e loc. lim. e $\Delta^n \subseteq [0,t]$, $\Delta^n = \{0 = t^n_0 < \ldots < t^n_{k(n)} = t\}$ t.c. $|\Delta^n| \to 0$, allora $\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{k(n)-1} K_{t^n_i} (X_{t^n_{i+1}} - X_{t^n_i}) \to \int_0^t K_s \, dX_s$ in prob..

Dim.: $\sum_{i=0}^{k(n)-1} K_{t^n_i} (X_{t^n_{i+1}} - X_{t^n_i}) = (K^{\Delta^n} \cdot X)_t$.
$\hookrightarrow$ processo elementare opportuno
$K$ cont. $\Rightarrow K^{\Delta^n} \to K \Rightarrow K^{\Delta^n} \cdot X \to K \cdot X$ in prob.. □

## Regola di Leibniz

Se $(a_s)_{s \geq 0}$ è a var. finita e cont. e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è $C^1_b$ ($\to f'$ lim.) allora $s \mapsto f(a_s)$ è a var. finita.
$f(a_t) - f(a_0) = \int_0^t 1 \cdot d(f \circ a)_s = \int_0^t f'(a_s) \, da_s$.
$f(a_t) - f(a_s) - f'(a_s)(a_t - a_s) + o(|a_t - a_s|) = 0$.
LHS $\longrightarrow$ sommando su partizioni $\longleftarrow$ RHS