X semimart. cont., $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ C^2, "$dX_t = X_{t+\delta t}-X_t$".

Vogliamo: $F(X_t)$ semimart. cont. e $dF(X_t)=F'(X_t)dX_t+\frac{1}{2}F''(X_t)d\langle X\rangle_t$.

Rigorosamente: $F(X_t)=F(X_0)+\int_0^t F'(X_s)\,dX_s+\frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\,d\langle X\rangle_s$.

Prop.: se X e Y sono semimart. cont., allora vale $\forall t$

$$X_tY_t=X_0Y_0+\int_0^t X_s\,dY_s+\int_0^t Y_s\,dX_s+\langle X,Y\rangle_t.$$

Oss.: se $X=M$, $Y=N$ sono mart. loc. sappiamo che $N_tM_t-\langle M,N\rangle_t$ è mart. loc. cont. $=M_0N_0+\int_0^t M_s\,dN_s+\int_0^t N_s\,dN_s$.

Es.: se $M=N=B$ BM, $B_t^2-t=2\int_0^t B_s\,dB_s$.

Dim.: basta il caso $X=Y$: $XY=\frac{(X+Y)^2-X^2-Y^2}{2}$.

$\Delta=\{0=t_0<t_1<\dots<t_m=t\}\subseteq[0,t]$.

$\sum_{i=1}^m (X_{t_i}-X_{t_{i-1}})^2 \longrightarrow \langle X\rangle_t$ in prob. se $|\Delta|\to 0$.

$\sum_{i=1}^m\left((X_{t_i}^2-X_{t_{i-1}}^2)-2X_{t_{i-1}}(X_{t_i}-X_{t_{i-1}})\right)=$

$=X_t^2-X_0^2-2\sum_{i=1}^m X_{t_{i-1}}(X_{t_i}-X_{t_{i-1}})$.

Consideriamo il processo «elementare» $H_s=\sum_{i=1}^m X_{t_{i-1}}\mathbb{1}_{(t_{i-1},t_i]}(s)$.

$H\in\mathcal{E}$ se X è lim., e WLOG lo possiamo assumere (usando t.d.a.).

X cont. $\Rightarrow H_s\to X_s$ $\forall s$ P-q.c. per $|\Delta|\to 0$.

Con.dom. per semimart. $\Rightarrow \int_0^t H_s\,dX_s \xrightarrow{prob} \int_0^t X_s\,dX_s$. □

Oss.: l'insieme trascurabile per cui non vale la formula di Itô non dipende da t.

Def.: un processo $(X_s^i)_{s\ge 0,\, i=1,\dots,d}$ è detto semimart. (risp. mart. loc.) vettoriale cont. se tutte le componenti lo sono.

Teo.: sia $(X^i)_{i=1,\dots,d}$ semimart. vett. cont., $F\in C^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$.

Allora $F((X^i)_{i=1,\dots,d})$ è " " " e

$$F((X_t^i)_{i=1,\dots,d})=F((X_0^i)_{i=1,\dots,d})+\int_0^t\sum_{i=1}^m\frac{\partial F}{\partial x^i}(X_s)\,dX_s^i+\frac{1}{2}\int_0^t\sum_{i,j=1}^m\frac{\partial^2 F}{\partial x^i\partial x^j}(X_s)\,d\langle X^i,X^j\rangle_s.$$

formula di Itô

$d(F\circ X)=DF(X)\,dX+\frac{1}{2}D^2F(X)\,dX\otimes dX$.

Dim.: oss.: se $d=2$, $F(x,y)=xy$ è la prop. sopra.

Se $F,G\in C^2$ e vale la formula per $F\circ X$, $G\circ X$, allora vale per $(F\circ X)(G\circ X)$ (perché sono semimart.).

Se $F_n\in C^2(\mathbb{R}^d)$ soddisfano la formula e $F_n\to F$ in $C^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$, allora (a meno di arrestare X usando t.d.a.) per con.dom. anche $F\circ X$ la soddisfa.

Ogni funzione C^2 si può scrivere come limite in $C^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$ di polinomi. □

Oss.: se qualche componente di X è solo a var. finita, allora si può richiedere che F sia solo C^1 lungo quella direzione.

Esempi

Prop.: sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ t.c. $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ esistono cont., $\frac{\partial f}{\partial y}$ esiste cont., M mart. loc. cont. Allora $t\mapsto f(M_t,\langle M\rangle_t)$ è mart. loc. cont. qualora $\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$. In particolare, il processo $\mathcal{E}(M)_t=\exp(M_t-\frac{1}{2}\langle M\rangle_t)$ è mart. loc. cont..

Dim.: si applica la formula di Itô, usando l'oss.. □

Oss.: $\mathcal{E}(M)_t=\exp(M_0)+\int_0^t\mathcal{E}(M)_s\,dM_s \Leftrightarrow dZ_t=Z_t\,dM_t$.

Es.: sia $f\in L^2([0,+\infty),\mathcal{L}^1)$, B BM, $M_t=\int_0^t f(s)\,dB_s$. Allora

$\mathcal{E}(M)_t=\exp\left(\int_0^t f(s)\,dB_s-\frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)\,ds\right)$ è mart. loc.:

$d\mathcal{E}(M)_t=\mathcal{E}(M)_t f(t)\,dB_t \Rightarrow \langle\mathcal{E}(M)\rangle_t=\int_0^t\mathcal{E}^2(M)_s f^2(s)\,ds\Rightarrow$

$\Rightarrow E[\langle\mathcal{E}(M)\rangle_t]=\int_0^t E[\mathcal{E}^2(M)_s]f^2(s)\,ds=$

$=\int_0^t E\left[\exp\left(2\int_0^s f(r)\,dB_r-\int_0^s f^2(r)\,dr\right)\right]f^2(s)\,ds=$

$=\int_0^t E\left[\exp\left(2\int_0^s f(r)\,dB_r\right)\right]\exp\left(-\int_0^s f^2(r)\,dr\right)f^2(s)\,ds=$

$=\int_0^t\exp\left(\int_0^s f^2(r)\,dr\right)f^2(s)\,ds\le\exp(\|f\|_2^2)\|f\|_2^2<+\infty$.

Oss.: una mart. loc. cont. t.c. $M_t\ge 0$ $\forall t\ge 0$ (e integrabile) è una supermart. $\Rightarrow \mathcal{E}(M)_t$ supermart. $\Rightarrow E[\mathcal{E}(M)_t]\le E[\mathcal{E}(M)_0]=1$.

Ex.: $E[\mathcal{E}(M)_t]=1$ $\forall t\Rightarrow$ mart..

Prop.: $(B^i)_{i=1,\dots,d}$ BM d-dim., $f\in C^2(\mathbb{R}^d\times[0,+\infty))\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(B_t,t)=f(0,0)+\int_0^t\sum_{i=1}^d\frac{\partial f}{\partial x^i}(B_s,s)\,dB_s^i+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial t}(B_s,s)\,ds+\frac{1}{2}\int_0^t\sum_{i,j=1}^d\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(B_s,s)\,ds.$$

$f(B_t,t)-\int_0^t\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta f\right)(B_s,s)\,ds$ è mart. loc. cont..

Se f è armonica e indi. da t, allora $f\circ B$ è mart. loc. cont..