Eq. diff. ordinaria: $(x_t)_{t\geq 0}$ $dx_t = f(x_t)dt \; (+\, dB_t)$.
$dX_t = f(X_t)dt + \sigma dB_t$.
B BM d-dim., X semimart. vett. d-dim., $\sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$.
$dX_t = f(X_t)dt + \sigma_t(X_t)dB_t \rightsquigarrow X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)ds + \int_0^t \sigma_s(X_s)dB_s$.

Processi di diffusione

Contesto: $C([0,+\infty), \mathbb{R}^d)$ $d\in\mathbb{N}$, $d>0$: $\mathbb{W}$.
$w_s : (x_t)_{t\geq 0} \mapsto x_s$, $\mathcal{B}_t = \sigma(w_s \mid s\leq t)$.
$f:[0,+\infty)\times \mathbb{W} \to \mathbb{R}^{d'}$ è progr. mis. rispetto alla filtrazione $(\mathcal{B}_t)_{t\geq 0}$.
Es.: $f(t,x) = \bar{f}(t, x_t)$, $\bar{f}:[0,+\infty)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$.
Se $(X_t)_{t\geq 0}$ è un proc. cont. e adattato, $f(t,X)$ pure lo è.
Def.: date $f:[0,+\infty)\times\mathbb{W}\to\mathbb{R}^{d\times r}$, $g:[0,+\infty)\times\mathbb{W}\to\mathbb{R}^d$ adattate e cont..
Una soluzione dell'eq. diff. stocastica $dX = g(X)dt + f(X)dB$ è una coppia (X,B) definita su uno spazio $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ t.c.:
1) B è BM r-dim. rispetto a $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$;
2) X è semimart. vett. d-dim. e vale
$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t g^i(s,X)ds + \sum_{j=1}^r \int_0^t f^{ij}(s,X)dB_s^j$$
$\forall t\geq 0$, $i=1,\dots,d$.
(chiediamo che $\int_0^t |g^i(s,X)|ds < +\infty$ e $\int_0^t |f^{ij}(s,X)|^2 ds < +\infty$ $\forall i,j$ $\forall t$ $\mathbb{P}$-q.c.).
Oss.: la sol. (X,B) è definita su $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$.
Def.: date f,g come sopra, si dice che l'EDS $e(f,g)$ ammette:
1) unicità per traiettorie se, $\forall (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$, B $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-BM a valori in $\mathbb{R}^r$, se $(X,B), (\tilde{X}, B)$ sono sol. $X_0 = \tilde{X}_0$ $\mathbb{P}$-q.c. allora $X = \tilde{X}$ $\mathbb{P}$-q.c.;
2) unicità in legge se $\forall (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, B, X)$, $(\tilde\Omega, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, \tilde{B}, \tilde{X})$ sol. di $e(f,g)$ t.c. $X_0 = \tilde{X}_0$ in legge si ha che $X = \tilde{X}$ in legge.
Def.: date f,g, una sol. (X,B) di $e(f,g)$ (definita su $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$) è detta forte se X è adattata a $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$, la filtrazione generata da B e completata con i trascurabili di $\sigma(B_s \mid s\geq 0)$.
Una sol. non forte è detta debole.
Es.: eq. di Peano $\begin{cases} dx_t = \sqrt{|x_t|}\,dt = g(x_t)dt \\ x_0 = 1 \end{cases}$, $d=1$.
$x_t \equiv 0$ è sol.. $x_t^0 = \begin{cases} 0 & \text{se } t<s \\ \frac{1}{4}(t-s)^2 & \text{se } t\geq s \end{cases}$.

Es. di sol. strettamente debole: dato B, nell'evento $B_1 > 0$ poniamo $X_t = x_t^0$, nell'evento $B_1 \leq 0$ poniamo $X_t = 0$. $(X_t)_{t\geq 0}$ è cont. e adattato rispetto a $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B \vee \sigma(B_1)$, ma non rispetto a $\mathcal{F}_t^B$.
Teo. (Yamada–Watanabe): se vale l'unicità per traiettorie per $e(f,g)$, allora: i) vale l'unicità in legge per $e(f,g)$;
ii) ogni sol. è forte (partendo da $X_0 = x$ deterministico).
Idea: (X,B) su Ω, $(\tilde{X}, \tilde{B})$ su $\tilde\Omega$. Condizioniamo rispetto a B la prima e rispetto a $\tilde{B}$ la seconda $\rightsquigarrow Q(w), \tilde{Q}(w) \in P(\mathbb{W})$.
Possiamo definire una misura di prob. su $\underset{B=\tilde{B}}{\mathbb{W}} \times \underset{X}{\mathbb{W}} \times \underset{\tilde{X}}{\mathbb{W}}$, $(B,X), (B,\tilde{X}) \Rightarrow X = \tilde{X}$. Ma sono anche indi. per costruzione $\Rightarrow$ sono funzioni di B.