Setting della scorsa lezione ($\mathcal{E}(f,g)$).

Ipotesi: $|f(t,(x_s)_{s\geq 0}) - f(t,(y_s)_{s\geq 0})| + |g(t,(x_s)_{s\geq 0}) - g(t,(y_s)_{s\geq 0})| \leq$
$\leq K \sup_{0\leq s\leq t} |x_s - y_s| \ \forall x,y \in W \ \forall t$;
$\forall y = (\bar{y}_s)_{s\geq 0}$ cost., $(f(s,\bar{y}))_{s\geq 0}$ é loc. lim..

Teo.: in queste ipotesi, $\forall (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ ($\mathcal{F}_t$ cont. a dx e completa), dato un $\mathcal{F}_t$-BM $(B_t)_{t\geq 0}$, $\exists!$ sol. $(X_t)_{t\geq 0}$ di $\mathcal{E}(f,g)$, $X_0 = x$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$; inoltre, è forte.

Dim.: per semplicità, $d = r = 1$.

$$X_t = x + \int_0^t g(s,X)ds + \int_0^t f(s,X)dB_s.$$

Costruiamo $(X^n)_{n\geq 0}$ proc. approssimanti:

$X^0_t = x \ \forall t \geq 0$;

$X^{n+1}_t = S(X^n)_t$, $S(U) = x + \int_0^t g(s,U)ds + \int_0^t f(s,U)dB_s$.

Se U è cont. e adattato, per le ipotesi su f e g anche $S(U)$ lo è.

Dato $t \geq 0$, $\Phi_t(U,V) = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |U_s - V_s|^2\right]$.

$\Phi_t(S(U), S(V)) \leq ?$

$$S(U)_s - S(V)_s = \int_0^s (g(r,U) - g(r,V))dr + \int_0^s (f(r,U) - f(r,V))dB_r.$$

$$|S(U)_s - S(V)_s|^2 \leq 2\left|\int_0^s (g(r,U)-g(r,V))dr\right|^2 + 2\left|\int_0^s (f(r,U)-f(r,V))dB_r\right|^2 \leq$$

$$\overset{CS}{\leq} 2s\int_0^s |g(r,U)-g(r,V)|^2 dr + 2\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s (f(r,U)-f(r,V))dB_r\right|^2 \leq$$

$$\leq 2tK^2 \int_0^t \left(\sup_{0\leq r\leq s} |U_s - V_s|^2\right)ds + 2\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s (f(r,U)-f(r,V))dB_r\right|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |S(U)_s - S(V)_s|^2\right] \leq$$

$$\leq 2tK^2\int_0^t \Phi_r(U,V)dr + 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s (\underbrace{f(r,U)-f(r,V)}_{\in \mathcal{L}^2(B)})dB_r\right|^2\right] \leq$$

$$\overset{\text{Doob}}{\leq} 2tK^2\int_0^t \Phi_r(U,V)dr + 4\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t (f(r,U)-f(r,V))dB_r\right|^2\right].$$

Ricordiamo: $M \in H^2_0 \Rightarrow \mathbb{E}[|M_t|^2] = \mathbb{E}[\langle M\rangle_t]$. Allora

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t (f(r,U)-f(r,V))dB_r\right|^2\right] \leq 4K^2\int_0^t \Phi_r(U,V)dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_t(S(U),S(V)) \leq C\int_0^t \Phi_r(U,V)dr, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Per induzione,

$$\Phi_t(X^{n+1},X^n) \leq C^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \ldots \int_0^{t_{n-1}} \Phi_{t_n}(X^1,x)\,dt_n.$$

$\Phi_t(X^1,x) \leq C(T) < +\infty$.

Allora $\Phi_T(X^{n+1},X^n) \leq C(T)\dfrac{C^nT^n}{n!} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \Phi_T(X^{n+1},X^n)^{1/2} < +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall T \ \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X^{n+1}_t - X^n_t|^2\right]^{1/2} < +\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow (X^n)_{n\geq 0}$ è convergente in $L^2 \Rightarrow$ in prob..

$\exists X_t = \lim_{n\to+\infty} X^n_t$ cont. e adattato.

$$\underset{\downarrow X_t}{X^{n+1}_t} = x + \int_0^t g(s,X^n)ds + \int_0^t f(s,X^n)dB_s.$$

$g(s,X^n) \to g(s,X)$ in prob. perché $\sup_{0\leq s\leq t}|X_s - X^n_s| \to 0$ in prob., $f(s,X^n) \to f(s,X)$ pure.

Passo al limite $\Rightarrow$ X é pto fisso.

Unicità: $(X_t)_{t\geq 0}$, $(Y_t)_{t\geq 0}$ sol..

$\Phi_t(X,Y) = \Phi_t(S(X),S(Y)) \leq C\int_0^t \Phi_r(X,Y)dr$.

$t \mapsto \Phi_t(X,Y)$ è loc. lim. (finita).

⌈Se f e g non sono unif. lim., basta arrestare al primo istante in cui $|f(s,X)| \geq n$ (o $|f(s,Y)| \geq n$, o $|g(s,X)| \geq n$, o $|g(s,Y)| \geq n$). Anche per l'esistenza.⌋

Lemma di Gronwall: se $(a_t)_{t\geq 0}$, $a_t \geq 0$ loc. lim. e $\forall t$ $a_t \leq c\int_0^t a_s ds + b \Rightarrow a_t \leq b e^{ct} \ \forall t \geq 0 \Rightarrow$ unicità.

Ex.: trovare una stima di $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq T} |X^x_s - Y^y_s|^2\right]$ se $x \neq y$.

Oss.: X è $\mathcal{F}^B_t$-mis. $\Rightarrow$ la sol. è forte. □

Oss.: Yamada-Watanab $\Rightarrow$ unicità in legge.

Def.: $\mathcal{E}(f,g)$ é lineare se $f(s,X) = A_sx_s + b_s$, $g(s,X) = \tilde{A}_sx_s + \tilde{b}_s$, $(A_s)_{s\geq 0}$, $(\tilde{A}_s)_{s\geq 0}$ deterministiche.

Es.: $(\mathcal{E}(M)_t)_{t\geq 0}$ sol. di $dX_t = X_t dM_t$.

Se $M_t = \int_0^t h_s dB_s$, $dX_t = \underbrace{X_t h_t}_{f(t,X)} dB_t$.

Def.: se $(X_t)_{t\geq 0}$ è un processo Feller associato al semigruppo $(P_t)_{t\geq 0}$, una funzione f si dice appartenente al generatore di X se $\lim_{t\to 0^+} \dfrac{P_tf - f}{t}$ esiste (unif.). Si pone Af tale limite.

Supponiamo che $(X^x_t)_{t\geq 0}$ sia una sol. di $\mathcal{E}(\sigma,g)$ con $X^x_0 = x$ e $\sigma(s,x) = \tilde{\sigma}(s,x_s)$, $g(s,x) = \tilde{g}(s,x_s)$. Se f è $C^2(\mathbb{R}^d)$, Itô $\Rightarrow$

$$\Rightarrow df(X^x_t) = \nabla f(X^x_t)dX^x_t + \frac{1}{2}\nabla^2 f(X^x_t)dX^x_t \otimes dX^x_t =$$

$$= \nabla f(X^x_t)(g(t,X^x_t)dt + \sigma(t,X^x_t)dB_t) + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(X^x_t)\,d\langle (X^x)^i, (X^x)^j\rangle_t.$$

$$dx^i dx^j = \left(\sum_k \sigma^i_k dB_k\right)\left(\sum_l \sigma^j_l dB_l\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^r \sigma^i_k \sigma^j_l dt = (\sigma\sigma^T)^i_j dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow df(X^x_t) = \nabla f(X^x_t)(g(t,X^x_t)dt + \sigma(t,X^x_t)dB_t) + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(\sigma\sigma^T)^i_j\right)(X^x_t)}_{Tr(D^2f(X^x_t)(\sigma\sigma^T)(t,X^x_t))}dt.$$

Oss.: il termine $\int_0^t \nabla f(X^x_s)\sigma(s,X^x_s)dB_s$ è soltanto mart. loc. (in generale).

Se σ é loc. lim. e f è a supp. cpt., allora è mart. $\Rightarrow \mathbb{E}[\cdots] = 0$.

Quindi $\mathbb{E}[f(X^x_t)] = f(x) + \int_0^t \mathbb{E}[\nabla f(X^x_s)g(X^x_s) + \frac{1}{2}Tr(D^2f(X^x_s)(\sigma\sigma^T)(s,X^x_s))]ds$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{E}[f(X^x_t)] - f(x)}{t} \underset{\substack{\text{se } g, \sigma \text{ cont.,} \\ \text{uso con. dom.}}}{=} \mathbb{E}[\nabla f(X^x_0)g(X^x_0) + \frac{1}{2}Tr(D^2f(X^x_0)(\sigma\sigma^T)(0,X^x_0))] =$$

$$= \nabla f(x)g(x) + \frac{1}{2}Tr(D^2f(x)(\sigma\sigma^T)(0,x)) = (Af)(x).$$

Quindi, se X soddisfa $\mathcal{E}(\sigma,g)$ con σ, g loc. lim., abbiamo ottenuto il limite di cui sopra $\forall f \in C^2_c(\mathbb{R}^d)$.

EDS $\longrightarrow$ processo che ammette $\nabla f \cdot g + \frac{1}{2}(\nabla^2 f\,\sigma\sigma^T)$ come "generatore"

$$\forall f \in C^2(\mathbb{R}^d),\ f(X_t) = f(x) + \int_0^t (Af)(X_s)ds + \underbrace{\left(f(X_t) - f(x) - \int_0^t (Af)(X_s)ds\right)}_{\text{è mart. loc.}}$$

Def.: un processo $(X_t)_{t\geq 0}$ a traiettorie cont. è una sol. del problema delle mart. $\pi_x(\sigma\sigma^T, g)$ se $X_0 = x$ $\mathbb{P}$-q.c. e $\forall f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ $f(X_t) - \int_0^t \left(\nabla f(X_s)g(X_s) + \frac{1}{2}Tr(D^2f(X_s)\sigma\sigma^T(X_s))\right)ds$ é mart. (rispetto alla filtrazione di X_s).