Teo. (equazioni lineari): Siano H, X semimart. cont.. La sol.

$$Y_t = H_t + \int_0^t Y_s \, dX_s \quad (dY = dH + Y dX)$$ si rappresenta con

$$Y_t = \mathcal{E}(X)_t \left(H_0 + \int_0^t \mathcal{E}(X)_s^{-1} \left(dH_s - \frac{1}{2} d\langle H, X\rangle_s \right) \right).$$

Dim.: conti (a integrare, non a derivare). $\square$

Es.: OU. $dV_t = -\beta V_t dt + dB_t$, $V_0 = v$ ($\beta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $d=1$). $H_t = \sigma B_t + v$, $X_t = -\beta \Rightarrow$ la sol. è $V_t = e^{-\beta t}\left(v + \int_0^t e^{\beta s} \sigma \, dB_s \right)$. È un processo gaussiano perché $V_t = e^{-\beta(t-s)} V_s + \int_s^t e^{-\beta(t-r)} \sigma \, dB_r \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[V_t] = e^{-\beta t} v, \quad \mathrm{Cov}(V_t, V_s) = \frac{\sigma^2 e^{-\beta(t-s)}}{2\beta} \left(e^{2\beta(t \wedge s)} - 1 \right).$$

Es.: BM geometrico. $dX = \mu X dt + \sigma X dB$, $X_0 = x$, $\mu, \sigma > 0$.
($H = 0$, $\underbrace{X}_{\text{quella del teo.}} = \mu t + \sigma B$) La sol. è $X_t = x \exp\left((\mu - \sigma^2/2) t + \sigma B_t \right)$.

Ex.: ($d=1$) $dX = -\nabla \Phi(X) dt + \sqrt{\frac{2}{\beta}} \, dW_t$, $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ t.c. $\Phi(x) \xrightarrow{|x| \to +\infty} +\infty$, W_t BM standard. Assumiamo che X_t abbia densità ρ_t (rispetto a Lebesgue) $\forall t$.

1) Scrivere una PDE soddisfatta da ρ_t $\left(\frac{\partial}{\partial t} \rho_t = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\Phi \rho) \right)$; o qualcosa del genere

2) trovare $\rho(x) = \rho_t(x)$ che risolve, dedurre che $X_0 \sim \rho(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow X_t \sim \rho(x) \; \forall t$