# Girsanov

$(\Omega, \mathcal{F})$, $(\mathcal{F}^0_t)_{t\geq 0}$ filtrazione continua a dx ($\mathcal{F} = \mathcal{F}^0_\infty$).

Date $P, Q$ prob. su $\mathcal{F}$. Se $Q \ll P$ e $X$ è $\mathcal{F}^0_t - P$ semimart., allora $X$ è $\mathcal{F}^0_t - Q$ semimart.?

Notazione: $Q \lhd P \Leftrightarrow \forall t \geq 0 \; Q_{|\mathcal{F}^0_t} \ll P_{|\mathcal{F}^0_t} \Leftrightarrow \exists \, (D_t)_{t\geq 0}$,
$D_t = \dfrac{dQ_{|\mathcal{F}^0_t}}{dP_{|\mathcal{F}^0_t}}$; è una mart. $\geq 0$ e $\mathbb{E}_P[D_t] = \mathbb{E}_Q[\mathbb{1}_\Omega] = 1$.

**Prop.:** TFAE:

i) $Q \ll P$;

ii) $(D_t)_{t\geq 0}$ è unif. int.;

iii) si può estendere $Q_{|\mathcal{F}^0_t}$ a una misura $\tilde{Q}_{|\mathcal{F}^P_t} \ll P_{|\mathcal{F}^P_t}$. abbiamo aggiunto i P-trascurabili di $\mathcal{F}$

**Dim.:** i) $\Rightarrow$ ii): $D_\infty = \dfrac{dQ_{|\mathcal{F}^0_\infty}}{dP_{|\mathcal{F}^0_\infty}} \in L^1(\Omega, P)$ e chiude la mart. $(D_t)_{t\geq 0} \Rightarrow$
$\Rightarrow (D_t)_{t\geq 0}$ unif. int..

ii) $\Rightarrow$ i): per il teo. sulle mart. unif. int. (a tempo continuo)
$\exists \, D_\infty = \lim_{t\to+\infty} D_t$, convergenza in $L^1 \Rightarrow \mathbb{E}_P[D_\infty] = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}_P[D_t] = 1$.
Se $A \in \mathcal{F}^0_t$, $\mathbb{E}_P[\mathbb{1}_A D_\infty] = \lim_{s\to+\infty} \mathbb{E}_P[\mathbb{1}_A D_s] = \lim_{s\to+\infty, \, s\geq t} Q_{|\mathcal{F}^0_s}(A) = Q(A)$.
$\forall A \in \bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}^0_t$, $\mathbb{E}_{D_\infty P}[\mathbb{1}_A] = Q(A)$. Il criterio di coincidenza di misure ci dice che $D_\infty P = Q \Rightarrow D_\infty = \dfrac{dQ}{dP}$.

iii): no. $\square$

$Q \lhd P$, $D_t = \dfrac{dQ_{|\mathcal{F}^0_t}}{dP_{|\mathcal{F}^0_t}}$ cadlag.

**Prop.:** $(D_t)_{t\geq 0}$ è strettamente positiva $Q$-q.c., ossia posto
$T = \inf\{t \geq 0 \mid D_t = 0 \text{ o } D_{t-} = 0\}$ si ha $Q(T < +\infty) = 0$.

**Dim.:** dato $n \geq 1$, $T_n = \inf\{t \geq 0 \mid D_t \leq 1/n\}$ sono tda., $T_n \leq T$.
$T$ pure è t.d.a.. Dato $q \in \mathbb{Q}^+$, $T+q$ è t.d.a. e $T+q \geq T_n$.
$\mathbb{E}[D_{T_n+q} \underbrace{\mathbb{1}_{\{T_n<+\infty\}}}_{\in \mathcal{F}^0_{T_n}}] \underset{(D_t)_{t\geq 0} \text{ mart.}}{=} \mathbb{E}[D_{T_n} \mathbb{1}_{\{T_n<+\infty\}}] \leq \frac{1}{n}$.

Se $n \uparrow +\infty$, nell'evento $\{T<+\infty\}$ $\mathbb{E}_P[D_{(T+q)^-} \mathbb{1}_{\{T<+\infty\}}] = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow D_{(T+q)^-} = 0$ $P$-q.c. $\forall q \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow D_s = 0$ se $s > T$.

Sappiamo che $\underbrace{\mathbb{1}_{\{T<s\}}}_{\in \mathcal{F}^0_s} D_s = 0$ $P$-q.c. $\forall s$.

$0 = \mathbb{E}_P[\mathbb{1}_{\{T<s\}} D_s] = Q(T<s) \Rightarrow$
$\Rightarrow Q(T<+\infty) = \sup_{s>0} Q(T<s) = 0$. $\square$

**Prop.:** se $Q \lhd P$ e $T$ è t.d.a. allora $D_T$ è la densità di $Q_{|\mathcal{F}^0_T \cap \{T<+\infty\}}$ rispetto a $P_{|\mathcal{F}^0_T \cap \{T<+\infty\}}$.

**Oss.:** se $Q \ll P$ vale che $D_T = \dfrac{dQ_{|\mathcal{F}^0_T}}{dP_{|\mathcal{F}^0_T}}$.

**Dim.:** $A \in \mathcal{F}^0_T$, $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}^0_t$.
$Q(A \cap \{T\leq t\}) = \mathbb{E}_P[\underbrace{\mathbb{1}_{A\cap\{T\leq t\}}}_{\in \mathcal{F}^0_{t\wedge T}} D_t] = \mathbb{E}_P[\mathbb{1}_{A\cap\{T\leq t\}} D_{t\wedge T}]$.

Se $t \uparrow +\infty$, $\{T \leq t\} \uparrow \{T < +\infty\}$. BL $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ LHS $\uparrow Q(A \cap \{T<+\infty\})$ e RHS $= \mathbb{E}_P[\mathbb{1}_{A\cap\{T\leq t\}} D_T] \uparrow$
$\uparrow \mathbb{E}_P[\mathbb{1}_{A\cap\{T<+\infty\}} D_T]$. $\square$

Se $Q \lhd P$ e $X = X_0 + M + A$. Sotto $P$ $\mathrm{Var}_1(A)_t < +\infty \; \forall t \Rightarrow$
$\Rightarrow$ sotto $Q$ $\mathrm{Var}_1(A) < +\infty$.

Sotto $P$ $\langle M\rangle_t = \lim_{|\Delta^n|\to 0} \sum_{i=1}^{k} |M_{t_i} - M_{t_{i-1}}|^2 + |M_t - M_{t_k}|^2$ in prob. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ anche sotto $Q$.

**Ex.:** $X_n \xrightarrow{P} X$ e $Q \ll P$, allora $X_n \xrightarrow{Q} X$.

**Oss.:** se $M, N$ mart. loc. cont. sotto $P$, allora $\langle M, N\rangle$ è la stessa se calcolata sotto $Q$.

**Teo. (Girsanov):** se $Q \lhd P$ e $(D_t)_{t\geq 0}$ è cont., data una $(\mathcal{F}^0_t, P)$-mart. loc. cont. $M$ allora il processo
$\tilde{M} = M - D^{-1} \cdot \langle D, M\rangle$ è una $(\mathcal{F}^0_t, Q)$-mart. loc. cont..
Inoltre, $\langle \tilde{M}, \tilde{N}\rangle = \langle M, N\rangle = \langle \tilde{M}, N\rangle$.

**Dim.:** 1) un processo cont. e adattato $(X_t)_{t\geq 0}$ è una $Q$-mart. (loc.) se $(X_t D_t)_{t\geq 0}$ è una $P$-mart. (loc.).

2) Itô su $\tilde{M}_t D_t$:
$d(\tilde{M}D) = \tilde{M}\,dD + D\,d\tilde{M} + d\langle D, \tilde{M}\rangle$. Per costruzione,
$d\tilde{M} = dM - D^{-1} d\langle D, M\rangle \Rightarrow$
$\Rightarrow d(\tilde{M}D) = \tilde{M}\,dD + D\,dM - d\langle \cancel{D}, M\rangle + d\langle \cancel{D}, \tilde{M}\rangle$.

1) $(X_t D_t)_{t\geq 0}$ mart. loc. e $T$ t.d.a. t.c. $(XD)^T$ è mart. sotto $P$.
$(XD)^T_t = X_{T\wedge t} D_{T\wedge t}$. Se $s<t$, $A \in \mathcal{F}^0_s$,
$\mathbb{E}_Q[\underbrace{\mathbb{1}_A X^T_t}_{\mathcal{F}^0_{T\wedge t}\text{-mis.}}] \overset{?}{=} \mathbb{E}_Q[\mathbb{1}_A X^T_s]$

$\mathbb{E}_P[\mathbb{1}_A X^T_t \frac{dQ_{|\mathcal{F}^0_{T\wedge t}}}{dP_{|\mathcal{F}^0_{T\wedge t}}}] = \mathbb{E}_P[\mathbb{1}_A X^T_t D_{T\wedge t}] = \mathbb{E}_P[\mathbb{1}_A (XD)^T_t] =$
$\underset{XD \text{ P-mart.}}{=} \mathbb{E}_P[\mathbb{1}_A (XD)^T_s] = \text{RHS}$.

Se $T_n \uparrow +\infty$ $P$-q.c., $T_n \wedge n \uparrow +\infty$ $P$-q.c. $\Rightarrow$ $Q$-q.c..

2) $\tilde{M}_t = M_t - \int_0^t D_s^{-1} d\langle D, M\rangle_s$. Definiamo i t.d.a.
$T_n = \inf\{t \mid D_t \leq 1/n\} \Rightarrow \tilde{M}_{T_n\wedge t} = M_{T_n\wedge t} - \int_0^{T_n} D_s^{-1} d\langle D, M\rangle_s$ è ben def.. Possiamo usare Itô su $\tilde{M}^{T_n} D^{T_n}$:
$\tilde{M}^{T_n}_t D^{T_n}_t = \tilde{M}_0 D_0 + \int_0^{T_n\wedge t} \tilde{M}_s\,dD_s + \int_0^{T_n\wedge t} D_s\,d\tilde{M}_s + \langle M, D\rangle_{T_n\wedge t} =$
$= \tilde{M}_0 D_0 + \int_0^{T_n\wedge t} \tilde{M}_s\,dD_s + \int_0^{T_n\wedge t} D_s\,dM_s$.

Quindi $(\tilde{M}D)^{T_n}$ è mart. (loc.) cont. su $P$.
$T_n \uparrow +\infty$ $P$-q.c.? Non è detto. $Q$-q.c. sì, e ci basta. $\square$

**Def.:** una coppia $P, Q$ è detta di Girsanov se $P_{|\mathcal{F}^0_\infty} \sim Q_{|\mathcal{F}^0_\infty}$ e $D$ è cont..

$M \mapsto \underset{G^Q_P(M)}{\underset{\parallel}{\tilde{M}}}$ è detta trasformata di Girsanov da $P$ a $Q$.