Prop.: se H è cont., adattato e in $L^2_{loc}(M,P)$, allora H è in $L^2_{loc}(\widetilde{M}, Q)$ $\underset{\hookrightarrow Q \ll P}{}$ e $\widetilde{(H\cdot M)} = H\cdot\widetilde{M}$.

Dim.: $\widetilde{H\cdot M} = H\cdot M - D^{-1}\cdot \langle D, H\cdot M\rangle = H\cdot M - D^{-1}\cdot(H\cdot\langle D,M\rangle) =$
$= H\cdot M - H\cdot(D^{-1}\cdot\langle D,M\rangle) = H\cdot(M - D^{-1}\cdot\langle D,M\rangle) = H\cdot\widetilde{M}$. $\square$

$D_t = \exp(L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t)$?

Prop.: se $(D_t)_{t\geq 0}$ è mart. loc. cont. strettamente positiva allora $\exists!\,(L_t)_{t\geq 0}$ mart. loc. t.c. $D_t = D_0\,\mathcal{E}(L)_t\ \forall t\geq 0$.
Inoltre, $(L_t)_{t\geq 0}$ soddisfa $L_t = \log D_0 + \int_0^t D_s^{-1}\,dD_s$.

Dim.: definiamo $L_t = \log D_0 + \int_0^t D_s^{-1}\,dD_s$, mart. loc. usando i t.d.a.
$T_m = \inf\{t\geq 0 \mid D_t \leq 1/m\}$. Oss.: $D>0$ P-q.c. $\Rightarrow T_m \uparrow +\infty$ P-q.c..
$\mathcal{E}(L)_t = \exp(L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t)$.
$d\mathcal{E}(L)_t = \mathcal{E}(L)_t\,dL_t$.
$dD_t = D_t D_t^{-1}\,dD_t = D_t\,dL_t$; si finisce per unicità dell'SDE. $\square$

Oss.: se $\forall t\geq 0$ $Q_{|\mathcal{F}_t^0} \sim P_{|\mathcal{F}_t^0}$, allora $D>0$ P-q.c..

Teo. (Girsanov): supponiamo che $Q_{|\mathcal{F}_t^0} = \mathcal{E}(L)_t P_{|\mathcal{F}_t^0}$ $\forall t$, $(L_t)_{t\geq 0}$ mart. loc. cont.. Allora $M \longmapsto \widetilde{M} = M - \langle L, M\rangle$ manda P-mart. loc. in Q-mart. loc..

Dim.: "$d(D^{-1}\cdot\langle D,M\rangle) = D^{-1}\,d\langle D,M\rangle = D^{-1}dD\,dM = dL\,dM = d\langle L,M\rangle$."
$D^{-1}\cdot\langle D,M\rangle = \langle D^{-1}\cdot D, M\rangle = \langle L, M\rangle$. $\square$

Cor.: se $Q \lhd P$ e $(B_t)_{t\geq 0}$ è P-$\mathcal{F}_t^0$ BM (e $(D_t)_{t\geq 0}$ è cont.) allora $\widetilde{B}_t = B_t - \int_0^t D_s^{-1}\,d\langle D, B\rangle_s$ è Q-$\mathcal{F}_t^0$ BM.

Dim.: sappiamo che $\widetilde{B}$ è mart. loc. cont. e $\langle\widetilde{B}\rangle_t = \langle B\rangle_t = 0$ e $\widetilde{B}_0 = 0$. Levy $\Rightarrow \widetilde{B}$ Q-BM. $\square$

Oss.: se $D_t = D_0\,\mathcal{E}(L)_t$ e $L_t = \int_0^t H_s\,dB_s$, $H\in L^2_{loc}(B)$, allora $\widetilde{B}_t = B_t - \int_0^t H_s\,ds$.

Problema: di solito, L è data (mart. loc. cont.) e $(\mathcal{E}(L)_t)_{t\geq 0}$ è, a priori, solo una mart. loc. cont. e positiva.
Sotto quali condizioni è mart.?

Oss.: $(\mathcal{E}(L)_t)_{t\geq 0}$ è una supermart.. In particolare, è mart. $\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \mathbb{E}_P[\mathcal{E}(L)_t] = 1\ \forall t\geq 0$.

Se $(\mathcal{E}(L)_t)_{t\geq 0}$ è mart., è ben def. $Q_{|\mathcal{F}_t^0} = \mathcal{E}(L)_t P_{|\mathcal{F}_t^0} \Rightarrow Q \lhd P$.

Prop. (Kazamaki): se $(L_t)_{t\geq 0}$ è mart. loc. cont. e $(\exp(\frac{1}{2}L_t))_{t\geq 0}$ è unif. int. allora $\mathcal{E}(L)$ è mart. unif. int..

Dim.: sia $a\in(0,1)$ e scriviamo $\mathcal{E}(aL)_t = \exp(aL_t - \frac{a^2}{2}\langle L\rangle_t) =$
$= \exp((a-a^2)L_t)\exp(a^2(L_t - \frac{\langle L\rangle_t}{2}))$. Sia $\Gamma\in\mathcal{F}_\infty^0$. Allora
$\mathbb{E}[\mathbb{1}_\Gamma\,\mathcal{E}(aL)_t] = \mathbb{E}\left[(\mathbb{1}_\Gamma \exp((a-a^2)L_t))(\mathbb{1}_\Gamma\exp(a^2(L_t - \frac{\langle L\rangle_t}{2})))\right] \leq$

Hölder con $p = \frac{1}{a^2}$

$\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Gamma \exp(\frac{a}{1+a}L_t)\right]^{1-a^2}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Gamma\,\mathcal{E}(L)_t\right]^{a^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{1}_\Gamma\,\mathcal{E}(aL)_t] \leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Gamma\exp(\frac{a}{1+a}L_t)\right]^{1-a^2}$ $\leq$ ($\frac{a}{1+a} < 1/2$, Hölder con $p = \frac{1+a}{2a}$)
$\leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_\Gamma\exp(L_t/2)]^{(1-a^2)\frac{2a}{1+a}}$.
$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0$ t.c. $P(\Gamma)<\delta \Rightarrow \sup_t \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_\Gamma\exp(\frac{L_t}{2})\right] \leq \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall\, 0<a<1$ $(\mathcal{E}(aL)_t)_{t\geq 0}$ è unif. int. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ è mart.. Poniamo $\Gamma = \Omega$:
$\hookrightarrow$ si devono usare i t.d.a., vedi libro

devi prima passare al lim. dentro (vedi libro)

$1 = \mathbb{E}[\mathcal{E}(aL)_t] \leq \mathbb{E}\left[\exp(\frac{a}{1+a}L_t)\right]^{1-a^2}\mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_t\right]^{a^2} \overset{a\uparrow 1}{\Longrightarrow}$
$\Rightarrow \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_t] \geq 1 \Rightarrow$ è mart..
Per $t\to+\infty$, $1 \leq \left(\sup_t \mathbb{E}\left[\exp(L_t/2)\right]\right)^{\frac{(1-a^2)2a}{1+a}} \liminf_{t\to+\infty}\mathbb{E}\left[\mathcal{E}(L)_t\right]^{a^2}$.
$a\to 1 \Rightarrow 1 \leq \liminf_{t\to+\infty}\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_t] \leq 1$.

Ex.: X supermart. pos. e $\mathbb{E}[\lim_{t\to+\infty} X_t] \geq \mathbb{E}[X_0] \Rightarrow$
$\Rightarrow (X_t)_{t\geq 0}$ unif. int.. $\square$

Teo. (Novikov): se $(L_t)_{t\geq 0}$ mart. loc. cont. $L_0 = 0$ e $\mathbb{E}\left[\exp(\frac{1}{2}\langle L\rangle_\infty)\right] < +\infty$ allora $\mathcal{E}(L)$ è mart. e unif. int..

Dim.: vogliamo $(\exp(L_t/2))_{t\geq 0}$ unif. int..
$\forall p\geq 0\ \exists\, c_p>0$ t.c. $|x|^p \leq c_p\, e^{|x|/2}\ \forall x\in\mathbb{R}$.
$\mathbb{E}[\langle L\rangle_\infty^{p}] \leq c_p\,\mathbb{E}[e^{\langle L\rangle_\infty/2}]$. $p=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{E}[\langle L\rangle_\infty] < +\infty \Rightarrow L\in H_0^2$.
BDG $\Rightarrow \mathbb{E}[\sup_{t\geq 0}|L_t|^{2p}] \leq c_p\,\mathbb{E}\left[\exp(\frac{\langle L\rangle_\infty}{2})\right]$.
$L\in H_0^2 \Rightarrow L_t = \mathbb{E}[L_\infty\mid\mathcal{F}_t] \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \leq \exp(\frac{L_t}{2}) = \exp\left(\frac{\mathbb{E}[L_\infty\mid\mathcal{F}_t]}{2}\right) \overset{\text{Jensen}}{\leq} \mathbb{E}\left[\exp(\frac{L_\infty}{2})\mid\mathcal{F}_t\right]$.
Ci basta $\mathbb{E}\left[\exp(\frac{L_\infty}{2})\right] < +\infty$.
$\mathbb{E}\left[\exp(\frac{L_t}{2})\right] = \mathbb{E}\left[\exp(\frac{L_t}{2} - a\langle L\rangle_t + a\langle L\rangle_t)\right] \overset{CS}{\leq}$
$\leq \mathbb{E}\left[\exp(L_t - 2a\langle L\rangle_t)\right]^{1/2}\mathbb{E}\left[\exp(2a\langle L\rangle_t)\right]^{1/2} \overset{a=1/4}{=}$
$= \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_t]^{1/2}\,\mathbb{E}\left[\exp(\langle L\rangle_t/2)\right]^{1/2} \leq$
$\leq \mathbb{E}\left[\exp(\langle L\rangle_\infty/2)\right]^{1/2} < +\infty$, mandiamo $t\to+\infty$ e usiamo Fatou. $\square$

Es.: B BM, $H\in L^2_{loc}(B)$ t.c. $\mathbb{E}\left[\exp(\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}H_s^2\,ds)\right] < +\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{E}(H\cdot B)$ è mart. (unif. int.).

Es.: $H_s \equiv 1 \Rightarrow \mathcal{E}((H\cdot B)_t) = \mathcal{E}(B_t) = \exp(B_t - t/2)$ non è unif. int..