Date f, g, $f:[0,+\infty)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times r}$, $g:[0,+\infty)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$,
$e_x(f,g):\begin{cases} dX_t = g(t,X_t)dt + f(t,X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$, sia $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, B, X)$ una sol..
$h:[0,+\infty)\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, c'è un collegamento tra una sol. di $e_x(f,g)$ e una sol. di $e_x(f, g+fh)$.

Per semplicità $d=r=1$.

Poniamo $L_t = \int_0^t h(s,X_s)dB_s$; se $\mathcal{E}(L)$ è mart. allora sotto $\underset{\mathcal{E}(L)_\infty P}{\overset{\parallel}{Q}}$
$\tilde{B}_t = B_t - \langle L, B\rangle_t = B_t - \int_0^t h(s,X_s)ds$ è BM.

Dico che $(\Omega, \mathcal{F}, Q, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \tilde{B}, X)$ è sol. di $e_x(f, g+fh)$.

$$\begin{aligned} dX_t &= g(t,X_t)dt + f(t,X_t)dB_t = \\ &= g(t,X_t)dt + f(t,X_t)d(\tilde{B} + \langle L,B\rangle)_t = \\ &= (g(t,X_t) + h(t,X_t)f(t,X_t))dt + f(t,X_t)d\tilde{B}_t. \end{aligned}$$

Per essere formali si usa la forma integrale e si applicano le conseguenze di Girsanov.

Dobbiamo assicurarci $\mathcal{E}(L)$ mart..

Per Novikov ci basta $\mathbb{E}_P[\exp(\langle L\rangle_\infty/2)] < +\infty$.

$$\overset{\parallel}{\mathbb{E}_P\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} h^2(s,X_s)ds\right)\right]}$$

Se $|h| \leq C$ cost., $\mathbb{E}_P\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t h^2(s,X_s)ds\right)\right] < +\infty \ \forall t$.

Es.: $X_t = B_t$ BM soddisfa $e_0(1,0)$. Se $h:\mathbb{R}$ è borel. e lim., $\exists$ sol. di $dX_t = h(X_t)dt + dB_t$.

Oss.: se $e_x(f,g)$ ha unicità in legge allora $\forall h$ lim. $e_x(f, g+fh)$
" " " ".

Nell'es. c'è unicità in legge.