"e", "o", "non", "se... allora", "se e solo se":
Stabiliamo le loro proprietà rispetto a VERO/FALSO

PROPOSIZIONE (affermazione) → VERO / → FALSO (Terzo escluso)
→ la indico con P, Q, A, B, C

→ $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$
binario, binario, unario, binario, binario

"Def." dei connettivi:

→ modo di "digerire" questa tabella: vedila come $A \subseteq B$

P	¬P
V	F
F	V

P	Q	P∧Q	P∨Q	P→Q	P↔Q
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Def.: FORMULA PROPOSIZIONALE:
(1) le formule atomiche ($X, Y, \dots, A, B, C$) sono formule; → anche dette variabili
(2) se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono formule, anche $(\neg\mathcal{A}), (\mathcal{A}\wedge\mathcal{B}), (\mathcal{A}\vee\mathcal{B}), (\mathcal{A}\to\mathcal{B}), (\mathcal{A}\leftrightarrow\mathcal{B})$ sono formule.

L'insieme delle formule è il più piccolo che soddisfa (1) e (2) (lo si può costruire induttivamente).

Oss.: le formule sono stringhe finite di simboli.

Per risparmiare parentesi, le precedenze: $\neg$, $\wedge$ e $\vee$, $\to$.

Ex.: $\rho(\mathcal{A}) =$
- 0 se $\mathcal{A}$ è una formula atomica
- $\rho(\mathcal{B})+1$ se $\mathcal{A}$ è $(\neg\mathcal{B})$
- $\max\{\rho(\mathcal{B}), \rho(\mathcal{C})\}+1$ se $\mathcal{A}$ è $(\mathcal{B}\vee\mathcal{C})$, $(\mathcal{B}\wedge\mathcal{C})$, $(\mathcal{B}\to\mathcal{C})$, $(\mathcal{B}\leftrightarrow\mathcal{C})$

rango o lunghezza

Mostrare che $\rho(\mathcal{A}) = \min\{n \mid \mathcal{A} \in \mathcal{F}_n\}$.
→ i livelli della costruzione per induzione

Ex.: se k è il numero di connettivi che compaiono in $\mathcal{A}$, allora $n \leq k \leq 2^n$.

SEMANTICA del CALCOLO PROPOSIZIONALE

Def.: $\mathcal{L} = \{$insieme delle variabili o formule atomiche$\}$ (linguaggio).

Una interpretazione delle $\mathcal{L}$-formule proposizionali è una funzione $I: \mathrm{Form}(\mathcal{L}) \longrightarrow \{V, F\}$ dove vengono rispettate le tabelle di verità dei connettivi.

Prop.: sia $\alpha: \mathcal{L} \to \{V, F\}$; allora esiste unica interpretazione $I_\alpha: \mathrm{Form}(\mathcal{L}) \to \{V, F\}$ t.c. $I_{\alpha|\mathcal{L}} = \alpha$.

Dim.: per induzione sul rango della formula. □

Ex.: due interpretazioni che estendono α coincidono.

Es.: $A \to (\neg A \to B)$ è vera per ogni interpretazione (TAUTOLOGIA).

Def.: $\mathcal{A}$ è una TAUTOLOGIA se è vera in ogni interpretazione.

Es. (di tautologie): $A \to A$

$\neg(A\vee B) \longleftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

$\neg(A\wedge B) \longleftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

$\neg(A\to B) \longleftrightarrow (A \wedge \neg B)$

$(A\to B) \longleftrightarrow (\neg A \vee B)$