Def.: A è SODDISFACIBILE se esiste un'interpretazione I t.c. $I(A)=V$;

$\emptyset \models A$ ↰ A è LOGICAMENTE VERA (tautologia) se $I(A)=V$ per ogni interpretazione I;

A è CONTRADDITTORIA se $I(A)=F$ " " " ".

$I \models A$

Modus ponens: se $\models A \to B$ e $\models A$ allora $\models B$.

Ex.: le seguenti sono tautologie:

(1) $A \to (B \to A)$;

(2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

(3) $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$.

Ex.: sia A una formula dove compaiono le variabili $X_1, \dots, X_n$ (e nessun altra); allora A è una tautologia $\Rightarrow$ $\Rightarrow A(B_1/X_1, \dots, B_n/X_n)$ è una tautologia per ogni scelta delle formule $B_1, \dots, B_n$ ($A(B/X)$ è la formula che si ottiene sostituendo ogni occorrenza di X in A con la formula B). Viceversa, se A non è una tautologia esistono $B_1, \dots, B_n$ t.c. $A(B_1/X_1, \dots, B_n/X_n)$ è contraddittoria.

Def.: $A \models B$ ("B è conseguenza logica di A") se per ogni interpretazione I t.c. $I(A)=V$ anche $I(B)=V$.

Def.: $A \equiv B$ sono formule LOGICAMENTE EQUIVALENTI se per ogni interpretazione I, $I(A)=I(B)$.

- $A \equiv B \iff A \models B$ e $B \models A$
- $A \models B \iff \models A \to B$
- $A \equiv B \iff \models A \leftrightarrow B$

- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
- $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
- $A \wedge B \equiv B \wedge A$
- $A \to B \equiv \neg A \vee B$
- $\neg (A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
- $\neg (A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

Ex.: per ogni formula A esiste una formula B che contiene soltanto i connettivi $\{\neg, \to\}$ t.c. $A \equiv B$.

Ex.: come il precedente con $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$.

Ex.: vale con $\{\wedge, \vee\}$? $\{\neg, \leftrightarrow\}$? $\{\leftrightarrow, \vee\}$?

$*$: "entrambe false".

A	B	$A * B$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ex.: ogni formula A è logic. equiv. ad una formula che contiene solo il connettivo $*$. Hint: $\neg A \equiv A * A$.

Ex.: CNF Conjunctive Normal Form,
DNF Disjunctive " ":
per ogni formula A esistono $B_1 \equiv A$, $B_2 \equiv A$ t.c. B_1 è una congiunzione di disgiunzioni "letterali" e B_2 è una disgiunzione di congiunzioni "letterali".

$A \models B \wedge C \iff A \models B$ e $A \models C$

$A \models B \vee C \not\Longleftrightarrow A \models B$ o $A \models C$ (vale solo ($\Leftarrow$))

Es.: $A \vee \neg A \models X \vee \neg X$, ma $A \vee \neg A \not\models X$ e $A \vee \neg A \not\models \neg X$.

Ex.: $A \models B \to C \iff$ "$A \models B \Rightarrow A \models C$"? Spoiler: no.

$(A \to B) \vee (B \to A)$ è una tautologia, ma $A \not\Rightarrow B$, $B \not\Rightarrow A$, $A \not\models B$, $B \not\models A$.

Def.: T TEORIA PROPOSIZIONALE è un insieme di formule in un fissato linguaggio $\mathcal{L}$.

Def.: un MODELLO di una $\mathcal{L}$-teoria T è un'interpretazione I t.c. $I(A)=V$ per ogni $A \in T$, "$I \models T$".

Es.: A insieme. Voglio esprimere il concetto "ho un ordine totale su A".
$\mathcal{L} = \{ X_{ab} \mid (a,b) \in A \times A \}$; idea: X_{ab} significa $a < b$.

$T = \{X_{ab} \vee X_{ba} \mid a,b \in A\} \cup \{X_{ab} \wedge X_{bc} \to X_{ac} \mid a,b,c \in A\} \cup \{X_{ab} \to \neg X_{ba} \mid a,b \in A\}$.

- Se $<$ è un ordine totale su A, l'interpretazione $I_<$ dove $I_<(X_{ab}) = V \iff a < b$ è un modello di T.
- Se esiste un modello $I \models T$ allora definisco $a < b \iff I(X_{ab}) = V$ ed ho che $(A, <)$ è un insieme ordinato.

Def.: T è SODDISFACIBILE se ha un modello.

Teo. (di COMPATTEZZA): se una teoria è FINITAMENTE soddisfacibile, allora è soddisfacibile.

per ogni insieme finito di formule, le posso soddisfare