Prop. (dimostrazione PER CASI): $T \cup \{A\} \models B$ e $T \cup \{\neg A\} \models B \Rightarrow T \models B$.

Dim.: PA $T \not\models B$, allora $\exists M \models T$ t.c. $M \not\models B$, cioè $M \models \neg B$;
se $M \models A$, allora $M \models T \cup \{A\}$ e quindi $M \models B$,
se $M \models \neg A$, " $M \models T \cup \{\neg A\}$ " " ", assurdo. $\square$

Teo. (di DEDUZIONE "semantico"): $T, A_1, \dots, A_m \models B \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow T \models (A_1 \wedge \dots \wedge A_m) \to B$.

Dim.: ovvia dalle definizioni. $\square$

Oss.: TFAE: (1) T soddisfacibile;
(2) per ogni A, se $T \models A$ allora $T \not\models \neg A$;
(3) esiste B t.c. $T \not\models B$.

TFAE: (1)' T insoddisfacibile;
(2)' esiste A t.c. $T \models A$ e $T \models \neg A$;
(3)' per ogni B, $T \models B$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Esiste $M \models T$. Supponiamo $T \models A$, allora $M \models A$ e quindi $M \not\models \neg A$ e perciò $T \not\models \neg A$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Prendo A qualunque. Se $T \not\models A$, prendo $B = A$.
Se $T \models A$, allora $T \not\models \neg A$ e prendo $B = \neg A$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Se T non ha modelli, banalmente "per ogni modello $M \models T$, $M \models B$".

Teo. (dim. PER ASSURDO): $T \models A \Longleftrightarrow T \cup \{\neg A\}$ insoddisfacibile.

Dim.: ex.. $\square$

Prop.: T soddisfacibile. Per ogni A, $T \cup \{A\}$ è soddisfacibile o $T \cup \{\neg A\}$ soddisfacibile.

Dim.: prendo $M \models T$. Se $M \models A$, allora $M \models T \cup \{A\}$ e $T \cup \{A\}$ è sodd.,
se $M \models \neg A$, " $M \models T \cup \{\neg A\}$ e $T \cup \{\neg A\}$ " ". $\square$

Def.: T è semanticamente COMPLETA se per ogni A,
$T \models A$ aut $T \models \neg A$.
(aut ↳ xor)

Banalmente, T compl. $\Rightarrow$ T sodd..

Def.: $LC(T) = \{A \mid T \models A\}$ sono le CONSEGUENZE LOGICHE di T.
• $T \subseteq LC(T)$ • $LC(LC(T)) = LC(T)$.

Prop.: T sodd. $\Longleftrightarrow$ $LC(T)$ sodd..

Dim.: ($\Leftarrow$) ovvia.
($\Rightarrow$) Prendo $M \models T$. Se $A \in LC(T)$, cioè $T \models A$,
allora $M \models A$ e quindi $M \models T \cup \{A\}$.
$M \models T \Longleftrightarrow M \models LC(T)$. $\square$

Def.: T è semant. CHIUSA se $T = LC(T)$.

Prop.: T teoria. TFAE: (1) T è semant. compl. e chiusa;
(2) T è sodd. massimale.

Dim.: (1) $\Rightarrow$ (2) prendo $A \notin T$. T chiusa $\Rightarrow T \not\models A$.
T completa $\Rightarrow T \models \neg A$. Quindi $T \cup \{A\}$ è insodd.,
altrimenti se $M \models T \cup \{A\}$, $M \models \neg A$, assurdo.
(2) $\Rightarrow$ (1) Se $T \models A$ allora $T \cup \{A\}$ sodd.; per massimalità,
$T \cup \{A\} = T$, cioè $A \in T$.
Supponiamo $T \not\models A$, allora esiste $M \models T$ t.c. $M \not\models A$,
cioè $M \models \neg A$. Allora $T \cup \{\neg A\}$ sodd.; per massimalità,
$\neg A \in T$ e in particolare $T \models \neg A$. $\square$

Teo. (COMPATTEZZA semant. per il calcolo proposizionale):
(C) T finit. sodd. $\Rightarrow$ T sodd.;
$\forall T_0 \subseteq T$ finito $\Rightarrow T_0$ sodd.
(C)' $T \models A \Rightarrow \exists T_0 \subseteq T$ finito t.c. $T_0 \models A$.

(C) $\Rightarrow$ (C)' Se non valesse (C)' esisterebbe A t.c. $T \models A$ e
per ogni $T_0 \subseteq T$ finito $T_0 \not\models A$. Allora $\exists M_{T_0} \models T_0$
dove $M_{T_0} \models \neg A$. Quindi $T \cup \{\neg A\}$ è finit. sodd.;
allora $\exists M \models T \cup \{\neg A\}$ e quindi $T \not\models A$, assurdo.

(C)' $\Rightarrow$ (C) $\forall T_0 \subseteq T$ finito $\exists M_{T_0} \models T_0$. Se T non è sodd.,
$T \models A$ e $T \models \neg A$. $\exists T_0, T_1 \subseteq T$ finiti t.c. $T_0 \models A$, $T_1 \models \neg A$.
Allora $T_0 \cup T_1 \models A$ e $T_0 \cup T_1 \models \neg A$ e ho trovato
$T' \subseteq T$ finito non sodd.. $\square$