Def.: T è FINITAMENTE SODDISFACIBILE se ogni $T_0 \subseteq T$ finito è sodd..

Lemma: sia T f.s.. Allora per ogni A $T\cup\{A\}$ è f.s. o $T\cup\{\neg A\}$ è f.s..

Dim.: se, per assurdo, sia $T\cup\{A\}$ che $T\cup\{\neg A\}$ sono non f.s., allora esistono $\{B_1,\dots,B_n\}\subseteq T\cup\{A\}$ non sodd. e $\{C_1,\dots,C_m\}\subseteq T\cup\{\neg A\}$ insodd.. Notiamo che T f.s. $\Rightarrow$ $\Rightarrow A = B_i$ e $\neg A = C_j$, ad esempio $A = B_n$, $\neg A = C_m$. $T_0 = \{B_1,\dots,B_{n-1}, C_1,\dots,C_{m-1}\}\subseteq T$ è sodd.. Sia $I\models T_0$. Se $I\models A$, allora $T_0\cup\{A\}$ è sodd., quindi $\{B_1,\dots,B_n\}$ è sodd., assurdo. Se $I\models\neg A$ analogo. $\square$

Dim. (di compattezza): $\mathcal{F} = \{S\supseteq T \mid S \text{ è f.s.}\}$ parzialmente ordinato per inclusione. Zorn $\Rightarrow$ prendiamo $\tilde{S}\in\mathcal{F}$ massimale.

(1) Per ogni formula A, $A\in\tilde{S} \iff \neg A\notin\tilde{S}$:

($\Rightarrow$) PA $A,\neg A\in\tilde{S}$. Allora $\{A,\neg A\}$ è un insieme finito insodd., assurdo;

($\Leftarrow$) PA $\neg A, A\notin\tilde{S}$. Ma per il lemma almeno una delle teorie $\tilde{S}\cup\{A\}$ o $\tilde{S}\cup\{\neg A\}$ è f.s.. Per massimalità, assurdo in entrambi i casi.

(2) Se $A\in\tilde{S}$ e $A\to B$ è una tautologia ($A\models B$), allora $B\in\tilde{S}$: se PA $B\notin\tilde{S}$ allora $\neg B\in\tilde{S}$ per la (1). Ma $\{A,\neg B\}$ è insodd., assurdo.

$I(A) := \begin{cases} V & \text{se } A\in\tilde{S} \\ F & \text{se } A\notin\tilde{S}\end{cases}$. Dobbiamo verificare che I è un'interpretazione.

- $I(A) = V \iff I(\neg A) = F$: è la (1)
- $I(A\wedge B) = V \iff I(A) = I(B) = V$:

  ($\Rightarrow$) $A\wedge B\in\tilde{S}$ e $(A\wedge B)\to A$ è una tautologia, quindi per la (2) $A\in\tilde{S}$, cioè $I(A)=V$. Analogamente, $I(B)=V$;

  ($\Leftarrow$) se PA $I(A\wedge B)=F$, cioè $A\wedge B\notin\tilde{S}$, allora $\neg(A\wedge B)\in\tilde{S}$, ma $\{A, B, \neg(A\wedge B)\}$ è insodd., assurdo

  - per dimostrare le altre si usano i punti precedenti relativi ai connettivi $\neg$ e $\wedge$, la (2) e le equivalenze logiche. $\square$

Ex.: sono proprietà equivalenti (ZF):

(1) teo. di compattezza del calcolo proposizionale;

(2) per ogni insieme Y, il prodotto topologico $\{0,1\}^Y$ è cpt..

Applicazioni del teorema di cpt

Ogni ordine parziale si estende a un ordine totale.

$\mathcal{L} = \{X_{ab} \mid a,b\in A\}$, "$X_{ab} \rightsquigarrow a<b$",

$T_A = \{\neg X_{aa}\mid a\in A\}\cup\{(X_{ab}\wedge X_{bc})\to X_{ac}\mid a,b,c\in A\}\cup$
$\cup\{X_{ab}\to\neg X_{ba}\mid a,b\in A\}\cup\{X_{ab}\vee X_{ba}\mid a,b\in A\}$.

Se $I\models T_A$ allora ottengo un ordine totale su A ponendo $a<b \overset{\text{def.}}{\iff} I\models X_{ab}$. Viceversa se $(A,<)$ è un ordine totale e definisco $I(X_{ab}) = V \iff a<_I b$, allora $I\models T_A$.

Sia $(A,<)$ un ordine parziale; cerco un modello della teoria $T_A^* = T_A\cup\{X_{ab}\mid a<b\}$. Se lo trovo, ottengo un ordine totale $<_I$ t.c. $a<b\Rightarrow a<_I b$.

Per l'esistenza di un modello di T_A^* basta dimostrare che ogni $T_0\subset T_A^*$ finito è soddisfacibile.

Nelle formule di T_0 compaiono negli indici delle variabili atomiche solo un numero finito di elementi di A, diciamo $A_0 = \{a_1,\dots,a_n\}$. Quindi $T_0\subseteq T_{A_0}\cup\{X_{ab}\mid a,b\in A_0,\ a<b\} = T_{A_0}^*$.

Dire che esiste un modello $I_0\models T_{A_0}^*$ equivale a dire che esiste un ordine totale su A_0 che estende $<_{|A_0}$.

Ogni ordine parziale finito si estende a un ordine totale.

Grafo (V,E): V insieme, E insieme di coppie di V.

Def.: (V,E) è k-colorabile se posso colorare i vertici con k colori in modo che ogni lato abbia vertici di colore diverso.

Ex.: (V,E) è k-col. $\iff$ lo è ogni suo sottografo finito.

Sol. (inizio): $\mathcal{L}^V_{\substack{\text{grafo}\\ k\text{-colorazione}}} = \{X_{ab}\mid a,b\in V,\ a\neq b\}\cup\underbrace{\{Y_a^i \mid a\in V,\ i=1,\dots,k\}}_{\mathcal{L}_V}$.

$T_{(V,E)} = \{X_{ab}\mid \{a,b\}\in E\}$.

$T_{k\text{-col.}} = \{\bigvee_{i=1}^{k} Y_a^i \mid a\in V\}\cup\{Y_a^i\to\bigwedge_{j\neq i}\neg Y_a^j \mid a\in V,\ i=1,\dots,k\}\cup$
$\cup\{Y_a^i\to\neg Y_b^i\mid\{a,b\}\in E,\ i=1,\dots,k\}$.

$I\models T_{k\text{-col.}} \rightsquigarrow k$-col. su (V,E). Quindi (V,E) k-col. $\iff T_{k\text{-col.}}$ sodd..