Teo.: sia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.c. $f(n) \neq n$ $\forall n$ e sia $\Gamma = (\mathbb{N}, E)$ il grafo dove $E = \{n, f(n)\}$. Allora il colore cromatico di Γ è 3.

Exc.: usando il teo. di cpt e l'appropriata versione finita della proprietà di sopra, dimostrare il teo..

Teo. (Ramsey infinito [per coppie]): $[\mathbb{N}]^2 = C_1 \cup \ldots \cup C_r \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists H$ infinito "omogeneo", cioè $\underset{\text{coppie}}{\downarrow}$ $[H]^2 \subseteq C_i$ (è monocromatico).

Teo. (Ramsey finito): $\forall r \forall m \exists N$ t.c. $\forall n \geq N \forall [\{1, \ldots, n\}]^2 = C_1 \cup \ldots \cup C_m$
$\exists H, |H| \geq m$ $\exists i$ $[H]^2 \subseteq C_i$.

- "Infinito $\Rightarrow$ finito" (principio di compattezza)

Teo. (Schur): $\forall \mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r$ $\exists a, b, a+b, a \neq b$ monocromatici.
↳ infinito

Teo. (Schur): $\forall r \exists N$ t.c. $\forall \{1, \ldots, N\} = C_1 \cup \ldots \cup C_r \exists$ ", ", ", " ".
↳ finito

Teo. (van der Waerder): $\forall \mathbb{N} = C_1 \cup \ldots \cup C_r \exists$ progressioni aritmetiche monocromatiche arbitrariamente lunghe.

Teo. (vdW finito): $\forall l \forall r \exists N$ t.c. $\forall \{1, \ldots, N\} = C_1 \cup \ldots \cup C_r \exists$ " " " di lunghezza l.

- Schur infinito $\Rightarrow$ Schur finito:
  PA non vale Schur finito, allora $\exists r$ t.c. $\forall N \exists \{1, \ldots, N\} = C_1^N \cup \ldots \cup C_r^N$ senza triple di Schur monocromatiche.
  $\mathcal{L} = \{X_n^i \mid n \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, r\}$

$$T = \left\{ \bigvee_{i=1}^{r} X_n^i \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ X_n^i \to \bigwedge_{j \neq i} \neg X_n^j \mid n \in \mathbb{N}, i = 1, \ldots, r \right\} \cup$$
$$\cup \left\{ X_a^i \wedge X_b^i \to \neg X_{a+b}^i \mid a, b \in \mathbb{N}, a \neq b, i = 1, \ldots, r \right\}.$$

$\exists I \models T \iff$ Schur infinito non vale.
T è f.s. per l'ipotesi assurda $\Rightarrow$ T sodd., assurdo.

Exc.: Ramsey infinito $\Rightarrow$ Ramsey finito.

Sistemi dimostrativi (calcolo proposizionale)

$\mathcal{S}$ → Assiomi logici Ax "insieme EFFETTIVO"
→ Regole di deduzione RELAZIONI "effettive" tra formule e formule o tra coppie di formule
↳ numero finito

Es.: $\mathcal{R}\ \dfrac{A}{\neg\neg A}$, $\mathcal{R}\ \dfrac{A, B}{A \wedge B}$

Def.: una <u>dimostrazione</u> della formula B nella teoria T con il sistema dimostrativo $\mathcal{S}$ è una sequenza finita di formule $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$ dove:

- $A_n = B$;
- per ogni $i \leq n$, $A_i \in Ax \cup T$ oppure A_i è ottenuta mediante una regola di deduzione dalle formule precedenti.

In tal caso, si scrive $T \vdash_{\mathcal{S}} B$.

Tra le regole di ded. si mette il modus ponens: $\mathcal{R}\ \dfrac{A, A \to B}{B}$.

"$\to, \neg$" $\quad Ax = ?$