Sintassi del calcolo proposizionale

① Se $A \in Ax$ o $A \in T$, allora $T \vdash A$.
② Se $T \vdash A$, allora $\exists\, T_0 \subseteq T$ finito t.c. $T_0 \vdash A$.
③ Se $T \vdash A$ e $T' \supseteq T$, allora $T' \vdash A$.

Def.: $\mathrm{Teor}(T) = \{A \mid T \vdash A\}$.

Prop.: $\mathrm{Teor}(\mathrm{Teor}(T)) = \mathrm{Teor}(T)$.

Dim.: $T \subseteq \mathrm{Teor}(T) \Rightarrow \mathrm{Teor}(T) \subseteq \mathrm{Teor}(\mathrm{Teor}(T))$.
Viceversa sia $A \in \mathrm{Teor}(\mathrm{Teor}(T))$ e sia $\langle A_1, \dots, A_n = A \rangle$ dimostrazione in $\mathrm{Teor}(T)$. Vogliamo dimostrare che $A \in \mathrm{Teor}(T)$, cioè $T \vdash A$. Per induzione sulla lunghezza della dim..
$n = 1$: $\langle A \rangle$, quindi $A \in Ax \cup \mathrm{Teor}(T) \Rightarrow T \vdash A$.
Passo induttivo: $n > 1$. Ci sono due possibilità:
se $A_n = A \in Ax \cup \mathrm{Teor}(T)$, allora $T \vdash A$;
altrimenti $A_n = A$ è ottenuta da formule precedenti mediante una regola di deduzione, ad esempio $\dfrac{A_i, A_j}{A_n = A}\, R$, dove $i, j < n$. $\langle A_1, \dots, A_i \rangle$ è una dim. in $\mathrm{Teor}(T)$ di A_i lunga $i < n$. Per ipotesi induttiva, $T \vdash A_i$. Analogamente, $T \vdash A_j$.
Prendo $\langle B_1, \dots, B_k = A_i \rangle$ dim. in T,
" $\langle C_1, \dots, C_m = A_j \rangle$ dim. in T $\Rightarrow$
$\Rightarrow \langle B_1, \dots, B_k = A_i, C_1, \dots, C_m = A_j, A \rangle$ è una dim. in T di A. □

Def.: T è COERENTE o CONSISTENTE se esiste B t.c. $T \nvdash B$.

Vorremmo che $T \vdash_{\mathcal{S}} A \Leftrightarrow T \models A$.
$\Rightarrow$: CORRETTEZZA
$\Leftarrow$: COMPLETEZZA

Def.: $\mathcal{S}_0$ SISTEMA DIMOSTRATIVO per il CALCOLO PROPOSIZIONALE:
$Ax = \{\text{tautologie}\}$, Regole $= \{\text{Modus Ponens}\}$ (MP).
(tautologie: è un insieme effettivo: si usano le tavole di verità)

Mendelson: regola: MP,
$\mathcal{M}$ $\to, \neg$,
Ax:
- $A \to (B \to A)$
- $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
- $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$.

Ex.: $((((p \to q) \to (\neg r \to \neg s)) \to r) \to t) \to ((t \to p) \to (s \to p))$
(assioma di Meredith); con il MP, seguono gli assiomi sopra.

- **Teo.:** se A è una tautologia, allora $\emptyset \vdash_{\mathcal{M}} A$.

Ex.: dimostrare che $\vdash_{\mathcal{M}} A \to A \; (\equiv A \vee \neg A)$.

Prop.: $T \vdash A$ (sottinteso $\mathcal{S}_0$) e $A \models B \Rightarrow T \vdash B$.

Dim.: $A \models B$ equivale a $A \to B$ tautologia.
Se $\langle A_1, \dots, A_n = A \rangle$ è una dim. di A, allora $\langle A_1, \dots, A_n = A, A \to B, B \rangle$ è una dim. di B. □

Cor.: se $A \equiv B$, allora $T \vdash A \Leftrightarrow T \vdash B$.

Prop.: se $T \vdash A$ e $T \vdash B$ allora $T \vdash A \wedge B$.

Dim.: $A \to (B \to (A \wedge B))$ tautologia. □

Teo. (CORRETTEZZA): $T \vdash A \Rightarrow T \models A$.

Dim.: sia $\langle A_1, \dots, A_n = A \rangle$ dim. di A. Per induzione su $k \leq n$ dimostro che $T \models A_k$.
$T \models A_1$ perché $A_1 \in Ax \cup T = Taut \cup T$.
Passo induttivo: $k > 1$. Ho due casi: se $A_k \in Ax \cup T$, $T \models A_k$; altrimenti $\dfrac{A_i, A_j}{A_k}$ MP. Deve essere $A_j = A_i \to A_k$.
Per ipotesi induttiva $T \models A_i$ e $T \models A_i \to A_k$. Quindi $T \models A_k$. □

Teo. (COMPLETEZZA): $T \models A \Rightarrow T \vdash A$.

Dim.: $T \models A \underset{\text{compattezza semantica}}{\Rightarrow} \exists\, T_0 \subseteq T$ finito con $T_0 \models A$. Quindi esistono $B_1, \dots, B_n \in T$ t.c. $\{B_1, \dots, B_n\} \models A$.
Questo equivale a dire che $B_1 \to (B_2 \to (B_3 \to (\dots (B_n \to A))))$ è una tautologia. □

Abbiamo visto che $\underset{\text{sintattico}}{T \vdash A} \Leftrightarrow \underset{\text{semantico}}{T \models A}$.

Usando proprietà già viste per $\models$:
- T contraddittorio (non coerente) $\Leftrightarrow T \vdash B$ per ogni B;
- $T, A \vdash B \Leftrightarrow T \vdash A \to B$ (teo. di deduzione di Herbrand);
- $T, A \vdash B$ e $T, \neg A \vdash B \Rightarrow T \vdash B$ (dim. per casi);
- T coerente $\Rightarrow$ per ogni A, $T \cup \{A\}$ coerente o $T \cup \{\neg A\}$ coerente.